

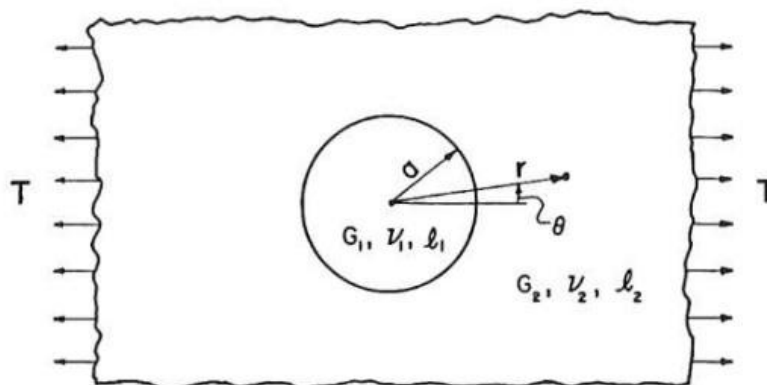


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΥΛΙΚΑ ΤΥΠΟΥ COSSERAT

ΑΝΕΣΤΗΣ ΑΝΔΡΙΑΝΟΣ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2023

© 2023 Ανέστης Ανδριανός

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Παναγιώτης Γουργιώτης
(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
 Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Λάμπρος Κούτας
 Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
 Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Χρήστος Παπακωνσταντίνου
 Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
 Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις βαθιές μου ευχαριστίες προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου για την αφοσίωση και την υποστήριξή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Οι προτάσεις του και οι συμβουλές του με βοήθησαν να ξεπεράσω κάθε εμπόδιο που συνάντησα και να προχωρήσω στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου. Η εμπειρία που αποκόμισα από το έργο του μου δίδαξε πολλά για τον τρόπο που πρέπει να προσεγγίζω την έρευνα στο μέλλον. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και τους συναδέλφους μου για τη στήριξή τους και τις παρατηρήσεις τους, οι οποίες με βοήθησαν να βελτιώσω την εργασία μου. Πάνω απ' όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αγάπη και την υποστήριξη που μου προσέφεραν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω αυτήν την εργασία στον αδερφό μου Παναγιώτη.

Ανέστης Ανδριανός

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΥΛΙΚΑ ΤΥΠΟΥ COSSERAT

Ανέστης Ανδριανός

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2023

Επιβλέπων Καθηγητής: Παναγιώτης Γουργιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της επιρροής της θεωρίας τάσεων ζεύγους σε άπειρο μέσο με κυκλική οπή υπό μονοαξονικό εφελκυσμό, σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Η μελέτη χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την περίπτωση της αφόρτιστης κυκλικής οπής ενώ στο δεύτερο μέρος η μελέτη αφορά διαφορετικά υλικά εγκλείσματος και περιβάλλοντος μέσου. Για το υπολογιστικό μέρος όσο και για την εξαγωγή σχημάτων και διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό πρόγραμμα Wolfram Mathematica 13.2. Αρχικά, αναφέρονται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας κλασικής ελαστικότητας της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Στην συνέχεια, περιγράφονται τα υπό μελέτη προβλήματα και τα βήματα επίλυσής τους. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και τα γραφήματα από κάθε μέθοδο και συγκρίνονται μεταξύ τους οδηγώντας στα τελικά συμπεράσματα.

Λέξεις Κλειδιά: Θεωρία Κλασικής Ελαστικότητας, Θεωρία Τάσεων Ζεύγους, Επίπεδη Παραμόρφωση, Οπή, Mathematica, Συγκέντρωση Τάσεων.

STRESS CONCENTRATION PROBLEMS IN COSSERAT TYPE MATERIALS

Anestis Andrianos

University of Thessaly, Department of Civil Engineering, 2023

Supervisor: Panagiotis Gourgiotis, Associate Professor

Abstract

The subject of this diploma thesis is the study of the influence of pair stress theory on an infinite medium with a circular hole under uniaxial tension in plane strain conditions. The study is divided into two parts. The first part includes the case of a stress-free circular hole while in the second part the study deals with different inclusion materials and surrounding medium. The program Wolfram Mathematica 13.2 was used for the computational part as well as for the extraction of shapes and diagrams. First, the basics of the classical elasticity theory of couple stress theory are mentioned. Then, the problems under study and the steps to solve them are described. Finally, the results and graphs from each method are presented and compared with each other leading to the final conclusions.

Keywords: *Theory of Classical Elasticity, Couple Stress Theory, Plane Strain, Hole, Mathematica, Stress Concentration.*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	1
1.1	Αναγκαιότητα μελέτης προβλημάτων άπειρου μέσου με οπές	1
1.2	Διαφορές κλασικής θεωρίας ελαστικότητας έναντι της θεωρίας τάσεων ζεύγους	2
1.3	Περιγραφή του προβλήματος.....	3
Κεφάλαιο 2	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	5
2.1	Γενικά	5
2.2	Θεωρία κλασικής ελαστικότητας	6
2.2.1	Ορθή τάση.....	6
2.2.2	Διατμητική τάση.....	7
2.2.3	Τανυστής τάσεων.....	8
2.2.4	Κανόνας αμοιβαιότητας διατμητικών τάσεων	9
2.2.5	Μετατοπίσεις και παραμορφώσεις	12
2.2.6	Ορθή τροπή.....	14
2.2.7	Διατμητική τροπή.....	16
2.2.8	Τανυστής τροπής	17
2.2.9	Καταστατικές εξισώσεις.....	18
2.2.10	Προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης	20
2.2.11	Εξισώσεις συμβιβαστού	21
2.2.12	Πολικές συντεταγμένες.....	22
2.2.13	Τασική συνήρτηση Airy.....	24
2.2.14	Αξονοσυμμετρική λύση τασικής συνάρτησης Airy	26
2.3	Συγκέντρωση Τάσεων	27
2.3.1	Γενικά	27
2.3.2	Συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων (Σ.Σ.Τ).....	27
2.3.3	Αρχή Saint-Venant.....	27
2.4	Θεωρία Τάσεων Ζεύγους	29
2.4.1	Γενικά	29
2.4.2	Εξισώσεις ισορροπίας.....	30
2.4.3	Μετατοπίσεις και παραμορφώσεις.....	32

2.4.4	Εξισώσεις συμβιβαστού	36
2.4.5	Τασικές συναρτήσεις	37
2.4.6	Πολικές συντεταγμένες.....	39
2.4.7	Καταστατικές εξισώσεις.....	40
Κεφάλαιο 3	Επίλυση Προβλήματος	41
3.1	Βήματα Επίλυσης.....	41
3.1.1	Πρόβλημα αφόρτιστης κυκλικής οπής	41
3.1.2	Πρόβλημα διαφορετικών υλικών εγκλείσματος και περιβάλλοντος μέσου	51
Κεφάλαιο 4	Συμπεράσματα	59
4.1	ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΦΟΡΤΙΣΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΟΠΗΣ	59
4.2	ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΧΩΡΟΥ.....	64
	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	65
	Παράρτημα	67

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1: Πρόβλημα μονοαξονικού εφελκυσμού άπειρου μέσου για αφόρτιστη κυκλική οπή.....	4
Σχήμα 1.2: Πρόβλημα μονοαξονικού εφελκυσμού άπειρου μέσου για διάφορα υλικά εγκλείσματος και περιβάλλοντος μέσου.	4
Σχήμα 2.1: Ορθή τάση κυλινδρικού στοιχείου.	6
Σχήμα 2.2: Διατμητική τάση στοιχείου.	8
Σχήμα 2.3: Συνιστώσες τάσεων.	9
Σχήμα 2.4: Τανυστής τάσεων στο σύστημα συντεταγμένων x,y,z	10
Σχήμα 2.5: Τάσεις που προκαλούν ροπές στο $x'y'$ επίπεδο.	11
Σχήμα 2.6: Απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση.....	13
Σχήμα 2.7: Τυπικές παραμορφώσεις ορθογώνιου στοιχείου.	14
Σχήμα 2.8: Διοδιάστατη παραμόρφωση.	15
Σχήμα 2.9: Διατμητική τροπή.....	16
Σχήμα 2.10: Πρόσημα διατμητικής παραμόρφωσης.	17
Σχήμα 2.11: Συνεχείς μετατοπίσεις.	21
Σχήμα 2.12: Ασυνέχεια μετατοπίσεων.	22
Σχήμα 2.13: Πολικές Συντεταγμένες.....	23
Σχήμα 2.14: Στατικά ισοδύναμα φορτία.....	28
Σχήμα 2.15: Μονοπολικές και διπολικές δυνάμεις σε υλικό με μικροδομή.....	30
Σχήμα 2.16: Μη μεταβαλλόμενο εντατικό πεδίο.	31
Σχήμα 2.17: Μεταβαλλόμενο εντατικό πεδίο.	31
Σχήμα 2.18: Συμμετρικό και αντισυμμετρικό κομμάτι διατμητικής τάσης.....	33
Σχήμα 2.19: Καμπυλότητα κατά τον άξονα x	35
Σχήμα 2.20: Καμπυλότητα κατά τον άξονα y	35
Σχήμα 3.1: Άπειρο μέσο με αφόρτιστη οπή υπό ομοιόμορφη φόρτιση εφελκυσμού μακρινού πεδίου.....	42
Σχήμα 3.2: Διάγραμμα συνάρτησης $\cos(\theta)$	42
Σχήμα 3.3: Διάγραμμα συνάρτησης $\sin(\theta)$	43
Σχήμα 3.4: Διάγραμμα συνάρτησης $\cos(2\theta)$	43
Σχήμα 3.5: Διάγραμμα συνάρτησης $\sin(2\theta)$	44

Σχήμα 3.6: Συνοριακές τάσεις κλασική θεωρία ελαστικότητας.	45
Σχήμα 3.7: Απαραμόρφωτη κατάσταση οπής για $\alpha=1$	47
Σχήμα 3.8: Παραμορφωμένη κατάσταση οπής για $\alpha=1$	47
Σχήμα 3.9: Σύγκριση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης οπής για $\alpha=1$ κλασική θεωρία ελαστικότητας.	48
Σχήμα 3.10: Συνοριακές τάσεις θεωρίας τάσεων ζεύγους.	49
Σχήμα 3.11: Παραμορφωμένη κατάσταση οπής για $\alpha=1$ θεωρία τάσεων ζεύγους.	50
Σχήμα 3.12: Σύγκριση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης οπής για $\alpha=1$ θεωρία τάσεων ζεύγους.	51
Σχήμα 3.13: Άπειρο μέσο με διαφορετικά υλικά εγκλείσματος και περιβάλλοντος χώρου υπό ομοιόμορφη φόρτιση εφελκυσμού μακρινού πεδίου.	52
Σχήμα 3.14: α) Διεπιφάνεια υλικών, β) Συνθήκη συμβιβαστού μετακινήσεων κλασική θεωρία ελαστικότητας, γ) Συνθήκη συμβιβαστού μετακινήσεων και στρεφών θεωρία τάσεων ζεύγους.	53
Σχήμα 3.15: Μεταβολή τάσης ζεύγους μ_θ	54
Σχήμα 3.16: Μεταβολή ορθών τάσεων σ_θ και σ_ϕ	55
Σχήμα 3.17: Μεταβολή $\Sigma.S.T.(1)$ συναρτήσει των λ_1, λ_2 για $g=1/2$, $\nu_1=1/4$, $\nu_2=1/3$ με χρήση του λογισμικού Mathematica.	56
Σχήμα 3.18: Μεταβολή $\Sigma.S.T.(2)$ συναρτήσει των λ_1, λ_2 για $g=2$, $\nu_1=1/4$, $\nu_2=1/3$ με χρήση του λογισμικού Mathematica.	56
Σχήμα 4.1: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=1$	60
Σχήμα 4.2: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=2$	60
Σχήμα 4.3: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=4$	61
Σχήμα 4.4: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=8$	61
Σχήμα 4.5: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=10$	62
Σχήμα 4.6: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=20$	62

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1: Εξάρτηση Σ.Σ.Τ με τον λόγο α/I και τον λόγο Poisson.....	63
--	----

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Αναγκαιότητα μελέτης προβλημάτων άπειρου μέσου με οπές

Η μελέτη προβλημάτων άπειρου μέσου με οπές είναι ένας κρίσιμος τομέας έρευνας σε πολλές επιστήμες, όπως η φυσική, η μηχανική και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Η παρουσία οπών εισάγει πολυπλοκότητες που δεν υπάρχουν σε ένα ομοιογενές και συνεχές μέσο, οδηγώντας σε μια σειρά από ενδιαφέροντα προβλήματα. Ένας λόγος για τον οποίο είναι σημαντική η μελέτη αντίστοιχων προβλημάτων είναι ότι πολλά φυσικά φαινόμενα περιλαμβάνουν οπές ή κενά. Για παράδειγμα, η διάχυση χημικών ουσιών μέσα σε πορώδη μέσα καθώς και η ροή των ρευστών μέσα σε πετρώματα περιλαμβάνουν την αλληλεπίδραση του μέσου με οπές. Η κατανόηση των χημικών ουσιών ή των ρευστών σε τέτοια σενάρια είναι ζωτικής σημασίας για την πρόβλεψη και τον έλεγχο της συμπεριφοράς αυτών των συστημάτων. Παράλληλα, στην επιστήμη των υλικών, η μελέτη των ατελειών και των κενών στους κρυστάλλους είναι απαραίτητη για την κατανόηση των ιδιοτήτων και της συμπεριφοράς τους. Στη γεωφυσική, η μελέτη των σεισμικών κυμάτων σε πορώδη μέσα είναι απαραίτητη για την κατανόηση της δομής και των ιδιοτήτων του υπεδάφους. Στην πυρηνική μηχανική, η μελέτη της μεταφοράς ακτινοβολίας σε υλικά με κενά είναι κρίσιμη για το σχεδιασμό ασφαλών και αποδοτικών πυρηνικών αντιδραστήρων.

Ειδικότερα, η μελέτη τέτοιων προβλημάτων είναι εξίσου σημαντική και στο επάγγελμα του πολιτικού μηχανικού καθώς βοηθά στην κατανόηση της συμπεριφοράς των κατασκευών που έχουν κενά ή οπές, όπως σήραγγες, υπόγειοι αγωγοί και βαθιά θεμέλια. Οι γνώσεις που αποκτώνται από τέτοιες μελέτες μπορούν να συμβάλλουν στο σχεδιασμό δομών που είναι ασφαλείς, λειτουργικές και οικονομικές. Για παράδειγμα, η μελέτη της παραμόρφωσης και της κατανομής των τάσεων γύρω από μια σήραγγα μπορεί να βοηθήσει στον προσδιορισμό των πιθανών ζωνών αστοχίας και στο σχεδιασμό συστημάτων στήριξης για την αποφυγή

αστοχιών. Παρόμοια, η μελέτη της κατανομής των τάσεων γύρω από μια πασσαλοθεμελίωση μπορεί να βοηθήσει στον προσδιορισμό της φέρουσας ικανότητας της θεμελίωσης και να βοηθήσει στον ασφαλή σχεδιασμό της.

Επιπλέον, η χρησιμότητα αυτής της μελέτης εντοπίζεται και σε άλλους τομείς της επιστήμης του πολιτικού μηχανικού όπως ο δομοστατικός τομέας. Στις μεταλλικές κατασκευές οι κοχλιωτές συνδέσεις και οι ηλώσεις είναι δύο χαρακτηριστικά σενάρια όπου κρίνεται αναγκαίο να πραγματοποιηθεί διάνοιξη οπής ώστε να μπορούν συνδεθούν μεταξύ τους τα δομικά στοιχεία. Οι οπές αυτές δημιουργούν γεωμετρική ασυνέχεια στο υλικό με αποτέλεσμα να παύει να υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων καθώς στα σημεία αυτά και στην γειτονική περιοχή δημιουργείται τοπική αύξηση τους δημιουργώντας έτσι το φαινόμενο συγκέντρωσης της έντασης των τάσεων. Οι περιοχές αυτές αποτελούν συνήθως και τα σημεία έναρξης της αστοχίας του υλικού. Για όλους τους παραπάνω λόγους, κρίνεται αναγκαία η μελέτη του εντατικού πεδίου καθώς και των παραμορφώσεων γύρω από τις ατέλειες αυτές.

1.2 Διαφορές κλασικής θεωρίας ελαστικότητας έναντι της θεωρίας τάσεων ζεύγους

Η θεωρία κλασικής ελαστικότητας και η θεωρία τάσεων ζεύγους είναι δύο πλαίσια που χρησιμοποιούνται για την κατανόηση της συμπεριφοράς των υλικών κάτω από εξωτερικές φορτίσεις. Μια διαφορά μεταξύ δύο θεωριών είναι ότι οι καταστατικές εξισώσεις για τον τανυστή τάσεων είναι διαφορετικές. Στην κλασική θεωρία ελαστικότητας, ο τανυστής τάσεων θεωρείται συμμετρικός και σχετίζεται με τον τανυστή παραμορφώσεων μέσω μιας γραμμικής σχέσης γνωστής ως νόμος του Hooke. Αντίθετα, στη θεωρία της ζεύγους τάσεων, ο τανυστής τάσεων δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός και σχετίζεται με τον τανυστή παραμόρφωσης μέσω μιας μη γραμμικής σχέσης που περιλαμβάνει όρους που σχετίζονται με τη μικροδομή του υλικού.

Μια περαιτέρω διαφορά μεταξύ των δύο θεωριών είναι ότι η θεωρία των τάσεων ζεύγους προβλέπει πρόσθετους τρόπους παραμόρφωσης που δεν υπάρχουν στην κλασική θεωρία ελαστικότητας. Αυτοί οι πρόσθετοι τρόποι σχετίζονται με τη μικροδομή του υλικού

και καταγράφονται από τον συμμετρικό τανυστή παραμόρφωσης. Ως αποτέλεσμα, η θεωρία τάσεων ζεύγους προβλέπει πιο σύνθετη συμπεριφορά παραμόρφωσης από την κλασική θεωρία ελαστικότητας.

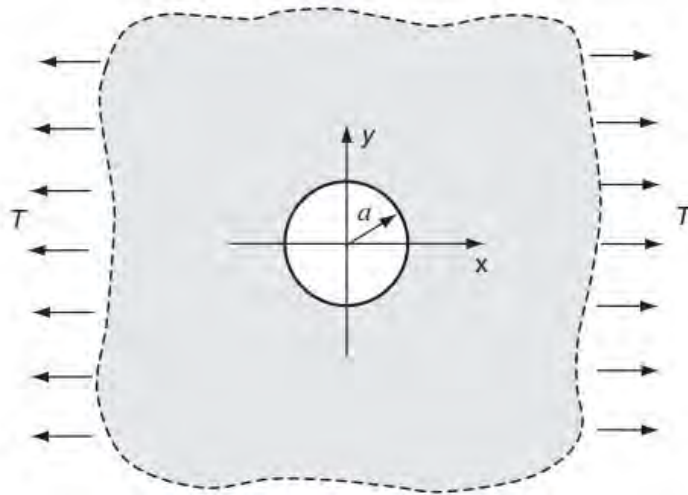
Συνοπτικά, οι κύριες διαφορές μεταξύ της θεωρίας ζευγών τάσεων και της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας είναι ότι η θεωρία ζευγών τάσεων λαμβάνει υπόψη τις επιδράσεις της μικροδομής και των στρωφικών βαθμών ελευθερίας, έχει διαφορετική καταστατική σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης και προβλέπει πρόσθετους τρόπους παραμόρφωσης που δεν υπάρχουν στην κλασική θεωρία ελαστικότητας. Η ύπαρξη μικροδομής στην μακροσκοπική συμπεριφορά των υλικών αναφέρεται ως φαινόμενο κλίμακας. Η κλασική θεωρία ελαστικότητας αδυνατεί να εξηγήσει αυτό το φαινόμενο το οποίο έχει αποδειχθεί και πειραματικά. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων θεωρώντας ένα υλικό πλήρως ομοιογενές το σφάλμα των αποτελεσμάτων είναι μικρό. Όταν όμως η κλίμακα της κατασκευής μικραίνει και γίνεται συγκρίσιμη με την κλίμακα του υλικού, τότε το σφάλμα μεγαλώνει και η κλασική θεωρία ελαστικότητας παύει να δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα. Οι παραδοχές που έχουν γίνει στα πλαίσια της κλασικής ελαστικότητας δεν λαμβάνουν υπόψη τις βαθμίδες τάσεων και παραμορφώσεων. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι αγνοείται η ύπαρξη κάποιου εσωτερικού χαρακτηριστικού μήκους στις εξισώσεις με αποτέλεσμα να μην συνυπολογίζεται η δομή του υλικού.

1.3 Περιγραφή του προβλήματος

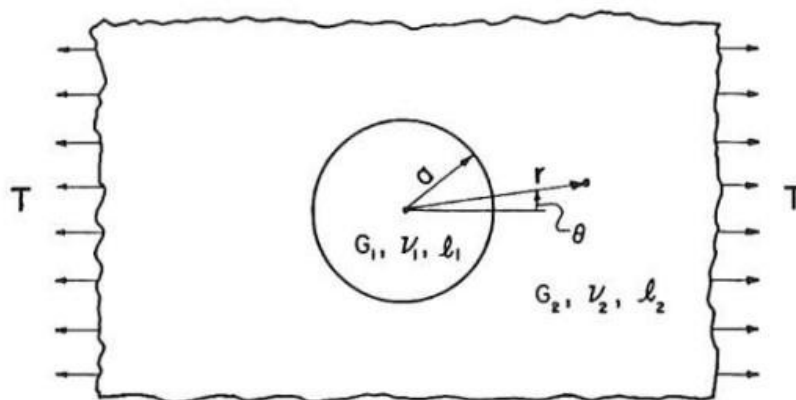
Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιλύεται το πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού άπειρου μέσου αρχικά για αφόρτιστη κυκλική οπή όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1 και στην συνέχεια για διαφορετικά υλικά εγκλείσματος και περιβάλλοντος χώρου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Το πρώτο πρόβλημα επιλύεται τόσο με την θεωρία κλασικής ελαστικότητας όσο και με την θεωρία τάσεων ζεύγους. Υπολογίζονται τα εντατική μεγέθη, οι παραμορφώσεις, οι μετατοπίσεις καθώς και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης. Στην συνέχεια, σχεδιάζονται τα διαγράμματα της παραμορφωμένης κατάστασης και συγκρίνονται μεταξύ τους.

Το δεύτερο πρόβλημα επιλύεται με την θεωρία τάσεων ζεύγους και τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της επίλυσης του αντίστοιχου

προβλήματος με την κλασική θεωρία ελαστικότητας όπως αυτά προκύπτουν από τις βιβλιογραφικές πηγές. Για όλους τους υπολογισμούς γίνεται η παραδοχή ότι υπάρχουν συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης οπότε το πρόβλημα τριών διαστάσεων μετατρέπεται σε ένα απλούστερο σε δύο διαστάσεις. Για τους υπολογισμούς και την εξαγωγή των σχημάτων χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό λογισμικό Mathematica και όλοι οι κώδικες αναγράφονται στο Παράρτημα Α.



Σχήμα 1.1: Πρόβλημα μονοαξονικού εφελκυσμού άπειρου μέσου για αφόρτιστη κυκλική οπή.



Σχήμα 1.2: Πρόβλημα μονοαξονικού εφελκυσμού άπειρου μέσου για διάφορα υλικά εγκλείσματος και περιβάλλοντος μέσου.

Κεφάλαιο 2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1 Γενικά

Η ύπαρξη τάσεων ζεύγους στα υλικά διατυπώθηκε αρχικά από τον Voigt (1887). Ωστόσο, ο Cosserat και Cosserat (1909) ήταν οι πρώτοι που ανέπτυξαν το μαθηματικό μοντέλο για την ανάλυση υλικών με τάσεις ζεύγους. Η θεωρία αυτή, που είναι μια πιο ολοκληρωμένη θεωρία από αυτή της κλασικής ελαστικότητας, θεωρεί ότι μέσα σε ένα ελαστικό σώμα οι επιφάνειες κάθε υλικού σημείου υπόκεινται όχι μόνο σε κάθετες και εφαπτομενικές δυνάμεις αλλά και σε ροπές ανά μονάδα επιφάνειας που ονομάζονται τάσεις ζεύγους. Αυτές οι ροπές αναπτύσσονται κυρίως σε υλικά με κοκκώδη ή κρυσταλλική δομή (Weitsman, 1965). Η διπολική θεωρία βαθμίδας εισήχθη από τους Tourin (1962) και Mindlin (1964) σε μια προσπάθεια να προσομοιώσουν την μηχανική συμπεριφορά στερεών υλικών με μικροδομή. Η θεωρία αυτή βασίζεται στη γενική άποψη ότι το συνεχές μέσο αποτελείται από στοιχειώδη παραμορφώσιμα σωματίδια, τα μακρομέσα. Η συμπεριφορά αυτή γίνεται εύκολα αντιληπτή αν κάθε ένα από αυτά τα μακρομέσα θεωρηθεί ως συλλογή μικρότερων υπό-σωματιδίων, τα μικρομέσα. Με τον τρόπο αυτό, κάθε σωματίδιο του συνεχούς μέσου εμπεριέχει ένα εσωτερικό πεδίο μετατοπίσεων. Επιπλέον, εισάγονται νέες σταθερές που αφορούν το υλικό, οι οποίες υποδεικνύουν την παρουσία ενός χαρακτηριστικού εσωτερικού μεγέθους. Το χαρακτηριστικό αυτό μέγεθος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού. Έτσι, ενσωματώνονται φαινόμενα κλίμακας (size effects) στην ανάλυση τάσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την κλασική θεωρία.

2.2 Θεωρία κλασικής ελαστικότητας

2.2.1 ΟΡΘΗ ΤΑΣΗ

Η ορθή τάση (normal stress) που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα (σ) είναι το μέτρο της έντασης των εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο ανά μονάδα επιφάνειας και ασκείται κάθετα στην επιφάνεια της διατομής. Όταν εφαρμόζεται αξονική δύναμη σε ένα στοιχείο, το υλικό υφίσταται παραμόρφωση και τείνει είτε να επιμηκυνθεί είτε να βραχυνθεί ανάλογα με το αν η δύναμη εφελκύει ή θλίβει το στοιχείο. Η ορθή τάση υπολογίζεται ως το πηλίκο της εφαρμοζόμενης δύναμης δια το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του στοιχείου, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.1. Μαθηματικά, η εφελκυστική τάση (σ) ορίζεται ως εξής:

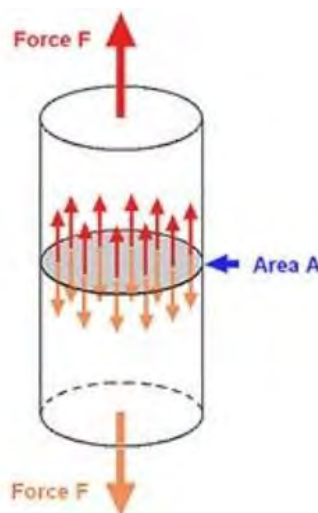
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.2.1.1)$$

Όπου:

σ είναι η εφελκυστική τάση,

F είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη και

A είναι η εγκάρσια επιφάνεια διατομής του στοιχείου.



Σχήμα 2.1: Ορθή τάση κυλινδρικού στοιχείου.

Η τελική εφελκυστική αντοχή χρησιμοποιείται συχνά για να αντιπροσωπεύσει τη μέγιστη εφελκυστική τάση που μπορεί να αντέξει ένα υλικό πριν φτάσει στην αστοχία. Η αξονική καταπόνηση μπορεί να είναι είτε αξονικός εφελκυσμός (tension) είτε αξονική θλίψη (compression). Η αναπτυσσόμενη ορθή τάση στον εφελκυσμό ονομάζεται εφελκυστική τάση και προσημαίνεται με (+) ενώ η αναπτυσσόμενη ορθή τάση στην θλίψη ονομάζεται θλιπτική τάση και προσημαίνεται με (-). Η μονάδα μέτρησης της εφελκυστικής τάσης είναι το Pascal (Pa) ή Newton (N) ανά τετραγωνικό μέτρο (N/m^2). Επειδή όμως το Pa είναι αρκετά μικρή μονάδα μέτρησης συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται τα πολλαπλάσια του kPa, MPa και GPa για τα οποία στην Εξ.(2.2.1.2) φαίνεται η ισοδυναμία με την αρχική μονάδα μέτρησης. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kPa} &= 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2 \\ 1 \text{ MPa} &= 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 \\ 1 \text{ GPa} &= 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2 \end{aligned} \quad (2.2.1.2)$$

Η ισχύς της Εξ.(2.2.2.1) προϋποθέτει εξιδανικευμένα υλικά στα οποία κάθε στοιχειώδες τμήμα της μικροδομής του συνεισφέρει ισομερώς στην ανάληψη της δύναμης F. Τα υλικά αυτά ονομάζονται ομογενή και μικροσκοπικά δεν υπάρχουν στην φύση. Τα πραγματικά υλικά παρουσιάζουν έναν βαθμό ανομοιογένειας με αποτέλεσμα κάποιες περιοχές να καταπονούνται εντονότερα. Θεωρώντας όμως το υλικό μακροσκοπικά ως ομογενές, η Εξ.(2.2.2.1) μπορεί να δώσει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα.

2.2.2 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ

Σε αντίθεση με την ορθή τάση που αναπτύσσεται σε επίπεδο κάθετα στην διατομή, η διατμητική τάση (shear stress) που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα (τ) κείται επάνω στο επίπεδο της διατομής. Η διατμητική τάση είναι ένα μηχανικό μέγεθος που αντιπροσωπεύει την εσωτερική αντίσταση ενός στοιχείου σε διατμητικές δυνάμεις που δρουν παράλληλα προς την επιφάνεια της διατομής του. Η διατμητική τάση εκφράζεται ως το πηλίκο της διατμητικής δύναμης δια το εμβαδόν της διατομής του στοιχείου παράλληλα προς την

εφαρμοζόμενη δύναμη, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.2. Μαθηματικά, η διατμητική τάση (τ) ορίζεται σύμφωνα με την Εξ.(2.2.2.1).

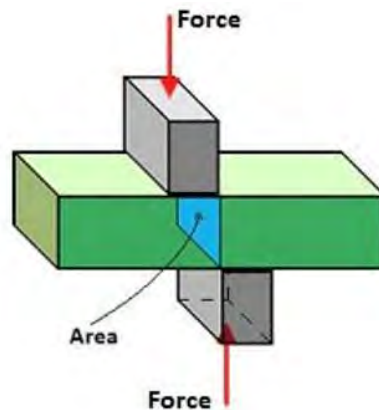
$$\tau = \frac{V}{A} \quad (2.2.2.1)$$

Όπου:

τ είναι η διατμητική τάση,

V είναι η εφαρμοζόμενη διατμητική δύναμη, και

A είναι το εμβαδόν διατομής του στοιχείου που είναι παράλληλο προς την εφαρμοζόμενη δύναμη.



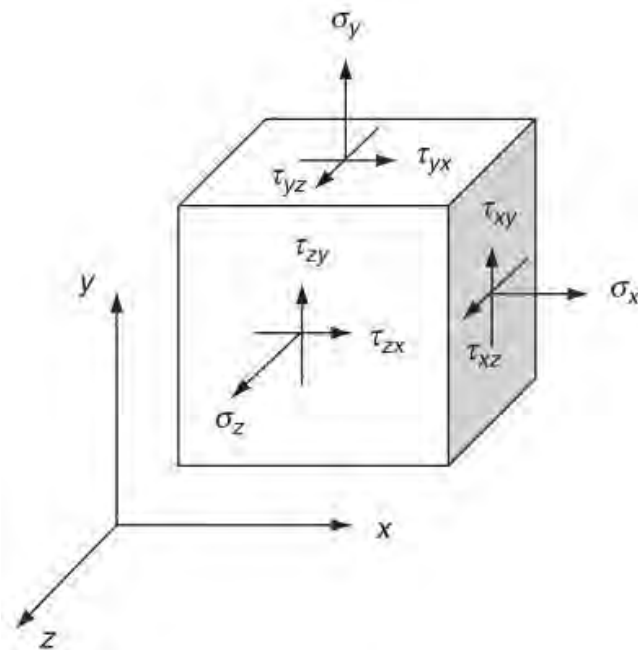
Σχήμα 2.2: Διατμητική τάση στοιχείου.

Η μονάδα μέτρησης της διατμητικής τάσης εκφράζεται σε Pascal (Pa) ή Newton ανά τετραγωνικό μέτρο (N/m^2). Κατά αντιστοιχία με την ορθή τάση, οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι τα πολλαπλάσια του Pa.

2.2.3 ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΑΣΕΩΝ

Όσον αφορά την γενική εντατική κατάσταση, αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες κυβικό κομμάτι υλικού, μπορούμε να αναλύσουμε και να σχεδιάσουμε τόσο τις ορθές τάσεις σ_x , σ_y , σ_z που αναπτύσσονται σε κάθε έδρα του κύβου όσο και τις διατμητικές τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy} όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 2.3. Ο πρώτος δείκτης δηλώνει τον άξονα στον οποίο είναι

κάθετη η τάση, δηλαδή το επίπεδο δράσης ενώ ο δεύτερος τον άξονα στον οποία είναι παράλληλη, δηλαδή την διεύθυνση. Ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων, η θετική ορθή τάση ενεργεί πάντοτε εφελκυστικά και μόνο ένας δείκτης είναι απαραίτητος επειδή δρα πάντα κάθετα στην επιφάνεια. Η διατμητική τάση, ωστόσο, απαιτεί δύο δείκτες. Έτσι, ο τανυστής των τάσεων για την γενική εντατική κατάσταση μπορεί μαθηματικά να αναπαρασταθεί με το μητρώο της Εξ.(2.2.3.1).



Σχήμα 2.3: Συνιστώσες τάσεων.

$$\sigma = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.2.3.1)$$

2.2.4 ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΜΟΙΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

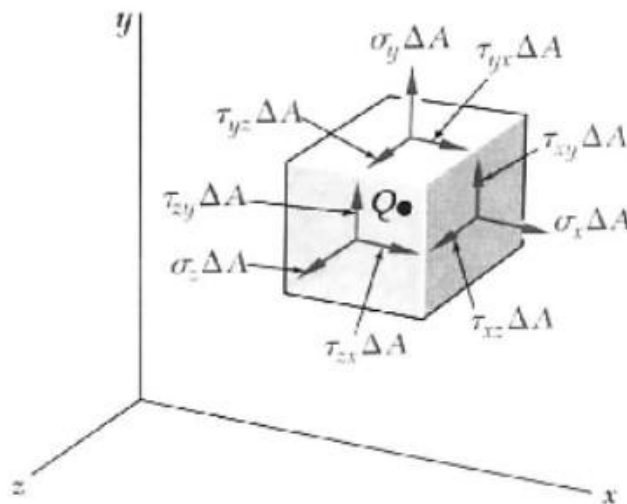
Θεωρώντας ότι κάθε έδρα του στοιχειώδους κυβικού κομματιού έχει εμβαδόν ΔΑ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4, τότε το γινόμενο του εμβαδού με τις συνιστώσες της τάσης δίνει το άθροισμα των ορθών και των τεμνουσών δυνάμεων. Επειδή στις τρεις μη ορατές

πλευρές του κύβου ενεργούν ίσες και αντίθετες δυνάμεις, ισχύουν οι στατικές συνθήκες ισορροπίας που παρουσιάζονται στις Εξς.(2.2.4.1).

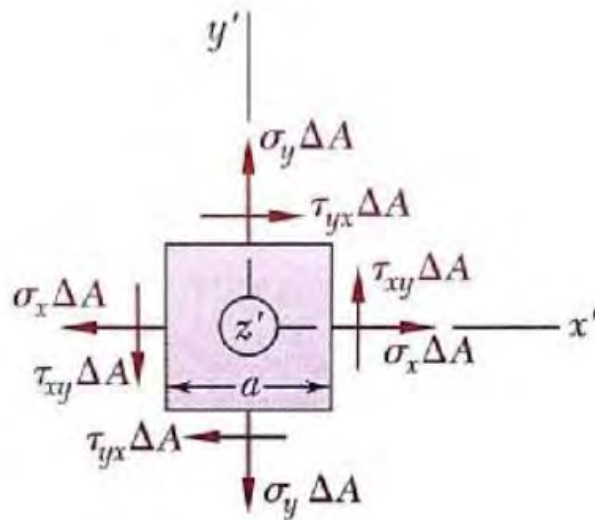
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0\end{aligned}\tag{2.2.4.1}$$

Με βάση το Σχήμα 2.5 και θεωρώντας επίσης τις ροπές M_x' , M_y' , M_z' των δυνάμεων που έχουν διεύθυνση παράλληλη προς τους αντίστοιχους άξονες ως προς το σημείο Q προκύπτουν από ισορροπία ροπών οι Εξς.(2.2.4.2).

$$\begin{aligned}\sum M_{x'} &= 0 \\ \sum M_{y'} &= 0 \\ \sum M_{z'} &= 0\end{aligned}\tag{2.2.4.2}$$



Σχήμα 2.4: Τανυστής τάσεων στο σύστημα συντεταγμένων xyz.



Σχήμα 2.5: Τάσεις που προκαλούν ροπές στο $x'y'$ επίπεδο.

Στο Σχήμα 2.5 οι μόνες δυνάμεις που δίνουν ροπές ως προς τον άξονα z' είναι οι διατμητικές, οι οποίες σχηματίζουν ένα ζεύγος δυνάμεων. Το ένα ζεύγους δυνάμεων δημιουργεί αριστερόστροφη ροπή ενώ το δεύτερο δημιουργεί δεξιόστροφη ροπή ίσου μέτρου οπότε αλληλοαναιρούνται. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται από την εξίσωση ισορροπίας ροπών που φαίνεται στην Εξ.(2.2.4.3) και επαληθεύει τον κανόνα αμοιβαιότητας των διατμητικών τάσεων.

$$\sum M_z = 0 \Leftrightarrow (\tau_{xy} * \Delta A) * \alpha - (\tau_{yx} * \Delta A) * \alpha = 0 \Leftrightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.2.4.3)$$

Κατά αντίστοιχο τρόπο για τους άλλους δύο άξονες από ισορροπία ροπών προκύπτουν οι Εξς.(2.2.4.4-2.2.4.5). Λόγω αυτής της συμμετρίας η Εξ.(2.2.3.1) παίρνει την μορφή της Εξ.(2.2.4.6), δηλαδή ενός συμμετρικού τανυστή με έξι ανεξάρτητα στοιχεία.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.2.4.4)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.2.4.5)$$

$$\sigma = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.2.4.6)$$

Ο τανυστής των τάσεων μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη όπως φαίνεται και από την Εξ.(2.2.4.7) με μορφή δεικτών. Το πρώτο μέρος αποτελεί το σφαιρικό κομμάτι του τανυστή (spherical tensor) και το δεύτερο το αποκλίνων κομμάτι του τανυστή (deviatoric tensor). Για τους δύο αυτούς τανυστές ισχύουν οι Εξ.(2.2.4.8-2.2.4.9).

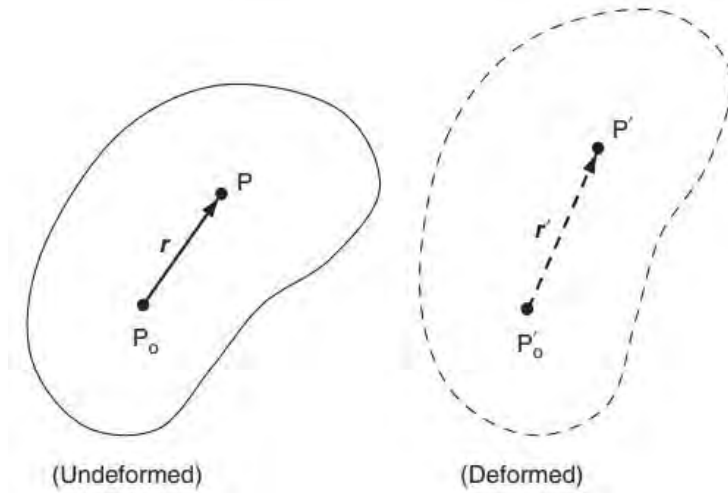
$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \hat{\sigma}_{ij} \quad (2.2.4.7)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2.4.8)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2.4.9)$$

2.2.5 ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Για να ποσοτικοποιήσουμε την παραμόρφωση, θεωρούμε το Σχήμα 2.6. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση, εντοπίζουμε δύο γειτονικά υλικά σημεία P_0 και P που συνδέονται με το διάνυσμα θέσης r . Λόγω της παραμόρφωσης, τα σημεία αυτά αποκτούν τις θέσεις P_0' και P' , οι οποίες συνδέονται με το νέο διάνυσμα θέσης r' . Στην θεωρία πεπερασμένης παραμόρφωσης, η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη κατάσταση μπορεί να διαφέρουν σημαντικά, ωστόσο επειδή η μελέτη γίνεται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας στην οποία ισχύει η θεωρία μικρών μετακινήσεων, η διαφορά μεταξύ απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης είναι μικρή.



Σχήμα 2.6: Απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση.

Η μετατόπιση μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά από τον танυστή κλίσης μετατόπισης (displacement gradient tensor) $u_{i,j}$ ο οποίος είναι ένας танυστής δεύτερης τάξης σύμφωνα με την Εξ.(2.2.2.2). Ο танυστής αυτός χωρίζεται σε δύο μέρη σύμφωνα με την Εξ.(2.2.2.3). Το πρώτο κομμάτι αντιπροσωπεύει το συμμετρικό μέρος ενώ το δεύτερο το αντισυμμετρικό μέρος. Το συμμετρικό μέρος e_{ij} ονομάζεται танυστής παραμόρφωσης ενώ το αντισυμμετρικό μέρος ω_{ij} ονομάζεται танυστής περιστροφής. Τα δύο μητρώα φαίνονται στις Εξ.(2.2.2.4-2.2.2.5).

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.2.2.2)$$

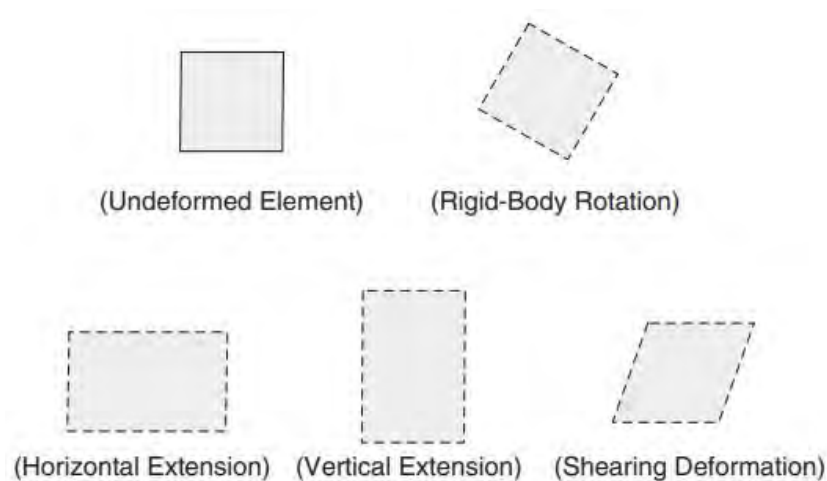
$$u_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.2.2.3)$$

Όπου:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2.2.4)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.2.2.5)$$

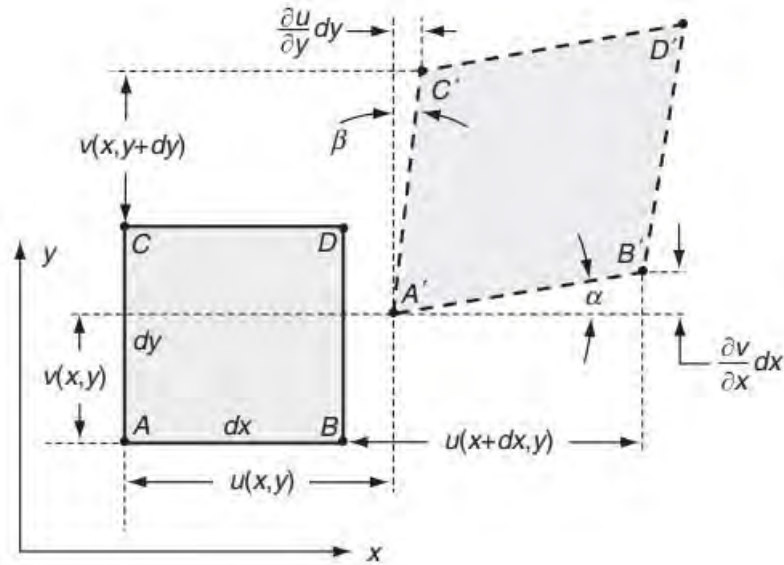
Οι πιθανοί τρόποι παραμόρφωσης ενός στοιχείου είναι η αξονική, η διατμητική και η στροφή ως στερεό σώμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7. Οι μετατοπίσεις στερεού σώματος δεν παράγουν ένταση οπότε δεν συνεισφέρουν στο πεδίο των τάσεων. Για τον λόγο αυτό, η μελέτη προσανατολίζεται μόνο στο συμμετρικό κομμάτι των μετατοπίσεων e_{ij} .



Σχήμα 2.7: Τυπικές παραμορφώσεις ορθογώνιου στοιχείου.

2.2.6 ΟΡΘΗ ΤΡΟΠΗ

Η αξονική παραμόρφωση μπορεί να είναι είτε θετική (επιμήκυνση) του στοιχείου είτε αρνητική (βράχυνση) του στοιχείου. Για να οριστεί η ορθή τροπή (normal strain) ενός σώματος εισάγουμε το Σχήμα 2.8 στο οποίο απεικονίζεται ένα ορθογώνιο σώμα πριν και μετά την παραμόρφωσή του. Ως ορθή τροπή (normal strain) που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα (ϵ) ορίζεται ο αδιάστατος λόγος της μεταβολής του μήκους ΔL ως προς το αρχικό μήκος L σύμφωνα με την Εξ.(2.2.2.6).



Σχήμα 2.8: Δισδιάστατη παραμόρφωση.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (2.2.2.6)$$

Από την γεωμετρία του Σχήματος 2.8 προκύπτει για το μήκος $A'B'$ η μαθηματική Εξ.(2.2.2.7) που παρουσιάζεται στην συνέχεια. Λόγω της παραδοχής των μικρών μετακινήσεων, οι όροι ανώτερης τάξης αμελούνται οπότε λαμβάνοντας υπόψιν ότι $AB=dx$ προκύπτει η απλοποιημένη Εξ.(2.2.2.8). Κατά αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν οι Εξ.(2.2.2.9-2.2.2.10) για τις άλλες δύο διευθύνσεις, οι οποίες ισχύουν μόνο για την γραμμικά ελαστική περιοχή του διαγράμματος τάσης-παραμόρφωσης καθώς στην πλαστική περιοχή οι παραμορφώσεις έχουν υψηλές τιμές και παύει να ισχύει η παραδοχή των μικρών μετακινήσεων.

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} dx \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \quad (2.2.2.7)$$

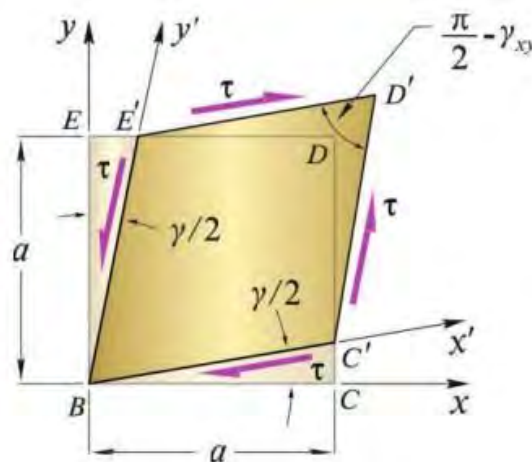
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.2.8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2.2.9)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2.2.10)$$

2.2.7 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΡΟΠΗ

Τον δεύτερο τύπο παραμόρφωσης αποτελεί η διατμητική τροπή (shear strain), η οποία συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα (γ) και δηλώνει την μεταβολή της γωνίας μετρούμενη σε ακτίνια (radians). Κατά την διατμητική παραμόρφωση το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του Σχήματος 2.9 μετατρέπεται σε πλάγιο. Με την παραδοχή των μικρών μετακινήσεων για τις οποίες ισχύει $\tan \alpha = \alpha$ και $\tan \beta = \beta$ και λαμβάνοντας υπόψιν την γεωμετρία του Σχήματος 2.9 προκύπτουν οι μαθηματικές Εξς.(2.2.5.1-2.2.5.2) για την διατμητική τροπή στο επίπεδο xy .



Σχήμα 2.9: Διατμητική τροπή.

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle C'A'B' = \alpha + \beta \quad (2.2.5.1)$$

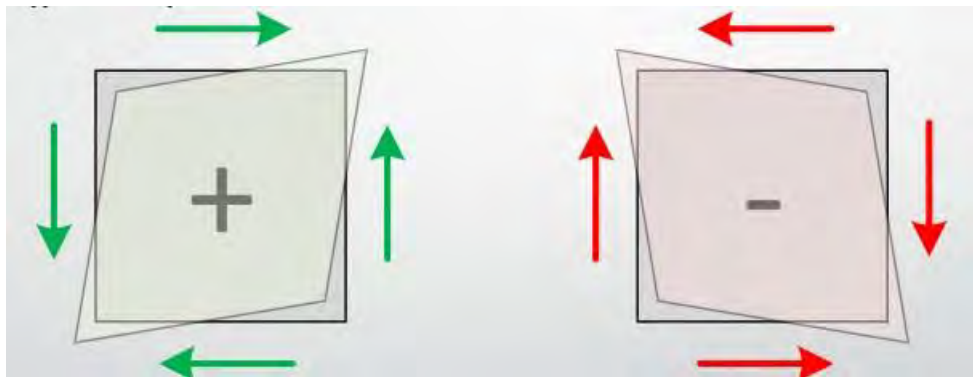
$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.5.2)$$

Κατά παρόμοιο τρόπο ορίζονται και οι διατμητικές τροπές στο επίπεδο xz και yz όπως φαίνεται στις Εξ.(2.2.5.3-2.2.5.4).

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2.5.3)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2.5.4)$$

Το πρόσημο της διατμητικής τροπής εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων και γίνεται η σύμβαση ότι θετική θα θεωρείται η τροπή όταν οι ημιάξονες x και y πλησιάσουν μεταξύ τους μετά την παραμόρφωση, δηλαδή η αρχική γωνία μετρούμενη σε rad μειώνεται και αρνητική όταν αυτοί απομακρύνονται, δηλαδή όταν η αρχική γωνία αυξάνεται όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10: Πρόσημο διατμητικής παραμόρφωσης.

2.2.8 ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΡΟΠΗΣ

Για να ορίσουμε τον τανυστή τροπής (e_{ij}) ο οποίος είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης που αποτελείται από έξι ανεξάρτητα στοιχεία, τρεις ορθές τροπές και τρεις διατμητικές, μετατρέπουμε τις τελευταίες σε ορθές μέσω των Εξ.(2.2.7.1). Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν και με μορφή δεικτών η οποία φαίνεται στην Εξ.(2.2.7.2). Μετά τον μετασχηματισμό των τροπών προκύπτει η τελική Εξ.(2.2.7.3) του τανυστή.

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.2.7.1)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2.7.2)$$

$$e = [e] = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix} \quad (2.2.7.3)$$

2.2.9 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι καταστατικές εξισώσεις είναι οι εξισώσεις που μας βοηθούν να συνδέσουμε τα εντατικά με τα παραμορφωσιακά μεγέθη. Εάν υποθέσουμε ότι το υλικό είναι ομοιογενές, η ελαστική συμπεριφορά δεν μεταβάλλεται χωρικά και έτσι όλες οι ελαστικές σταθερές μπορούν να θεωρηθούν πως δεν έχουν σημαντική διαφοροποίηση. Επιπρόσθετα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι το υπό μελέτη υλικό είναι ισότροπο προκύπτει η γενική Εξ.(2.2.11.1). Η τελευταία μπορεί να αναστραφεί ώστε να εκφράζει την παραμόρφωση συναρτήσει της τάσης. Για να επιτευχθεί αυτό εξισώνουμε τους δύο δείκτες της Εξ.(2.2.11.1) και λύνοντας την ως προς την παραμόρφωση προκύπτει η Εξ.(2.2.11.2). Στις Εξς.(2.2.11.3-2.2.11.4) αναγράφονται οι αναλυτικές εξισώσεις των Εξς.(2.2.11.1-2.2.11.2).

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.2.11.1)$$

Όπου:

λ είναι η σταθερά Lamé's,

δ_{ij} είναι το δέλτα Kronecker και

μ είναι το μέτρο διάτμησης

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \Leftrightarrow e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2.11.2)$$

Όπου:

ν είναι ο λόγος Poisson και

E είναι το μέτρο ελαστικότητας

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_x \\ \sigma_y &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_y \\ \sigma_z &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_z \\ \tau_{xy} &= 2\mu e_{xy} \\ \tau_{yz} &= 2\mu e_{yz} \\ \tau_{zx} &= 2\mu e_{zx} \end{aligned} \quad (2.2.11.3)$$

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ e_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau_{xy} \\ e_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} \\ e_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{2\mu} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (2.2.11.4)$$

Για τον λόγο Poisson (ν) και για το μέτρο ελαστικότητας (E) ισχύουν οι κάτωθι Εξ.(2.2.11.5-2.2.11.6). Επιπλέον, η Εξ.(2.2.11.1) αποτελεί τον γενικό νόμο του Hooke για γραμμικά ελαστικά και ισότροπα στερεά σύμφωνα με τον οποίο οι τάσεις συνδέονται γραμμικά με τις παραμορφώσεις. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι απαιτούνται μόνο δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές για την περιγραφή της συμπεριφοράς των ισότροπων υλικών όπως φαίνεται στην αντίστοιχη εξίσωση.

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (2.2.11.5)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} \quad (2.2.11.6)$$

Κατά αντιστοιχία με τον τανυστή των τάσεων, έτσι και ο τανυστής των παραμορφώσεων μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα του σφαιρικού τανυστή παραμόρφωσης και του αποκλίνων τανυστή παραμόρφωσης όπως φαίνεται στις Εξς.(2.2.9.7).

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \tilde{e}_{ij} + \hat{e}_{ij} \\ \tilde{e}_{ij} &= \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \\ \hat{e}_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.2.9.7)$$

2.2.10 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Η κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης αναφέρεται σε μια κατάσταση παραμόρφωσης κατά την οποία το υλικό θεωρείται πως έχει πεπερασμένη παραμόρφωση εντός του επιπέδου, ωστόσο υπάρχει αμελητέα παραμόρφωση στη διεύθυνση κάθετα στο επίπεδο. Έτσι το πρόβλημα τριών διαστάσεων ανάγεται σε ένα απλούστερο στις δύο διαστάσεις. Χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της παραδοχής αυτής αποτελούν οι πλάκες και γενικότερα οι δομές με λεπτά τοιχώματα. Με την παραδοχή αυτή, η ανάλυση μπορεί να απλοποιηθεί και οι μαθηματικοί υπολογισμοί μπορούν να εκτελεστούν με μεγαλύτερη ευκολία. Για τα προβλήματα της επίπεδης παραμόρφωσης ισχύουν οι Εξς.(2.2.12.1). Με την χρήση της τελευταίας εξίσωσης μετασχηματίζονται οι Εξς.(2.2.2.8-2.2.2.9-2.2.2.10-2.2.7.1-2.2.11.3) στις Εξς.(2.2.12.2-2.2.12.3).

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.12.1)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2.12.2)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$e_z = e_{xz} = e_{yz} = 0$$

$$\sigma_x = \lambda(e_x + e_y) + 2\mu e_x$$

$$\sigma_y = \lambda(e_x + e_y) + 2\mu e_y$$

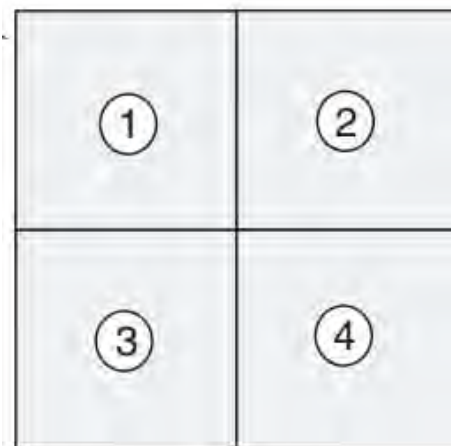
$$\sigma_z = \lambda(e_x + e_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.2.12.3)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu e_{xy}$$

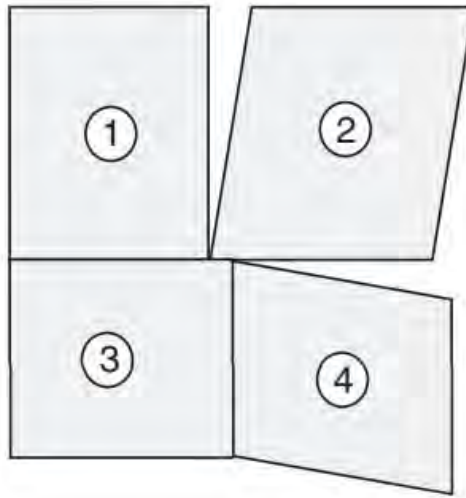
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

2.2.11 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟΥ

Για να εξασφαλιστεί το συνεχές του μέσου πρέπει οι τροπές να επαληθεύουν κάποιες επιπλέον εξισώσεις οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις συμβιβαστού. Με αυτόν τον τρόπο διασφαλίζονται οι συνεχείς μονοσήμαντες μετατοπίσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11 και ότι τα στοιχεία δεν θα μεταβάλλονται μεμονωμένα και ανεξάρτητα με τα γειτονικά τους όπως στο Σχήμα 2.12. Η μαθηματική εξίσωση που προκύπτει για την εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων φαίνεται στην Εξ.(2.2.11.1).



Σχήμα 2.11: Συνεχείς μετατοπίσεις.

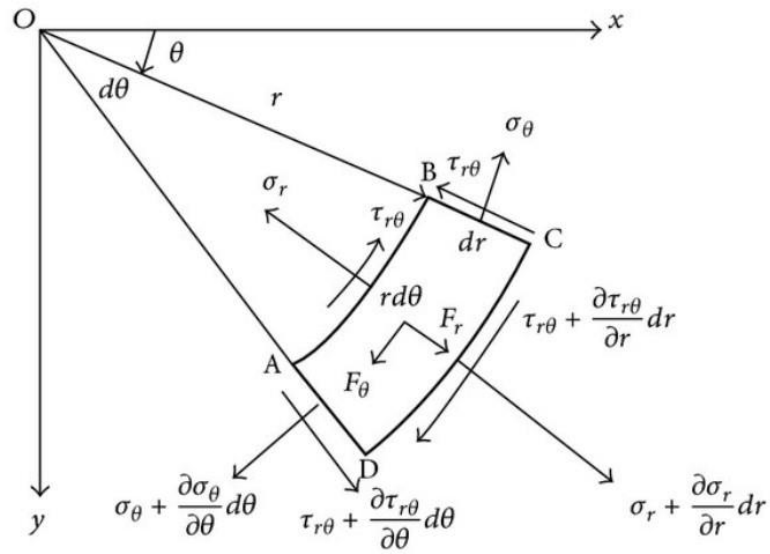


Σχήμα 2.12: Ασυνέχεια μετατοπίσεων.

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} + e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (2.2.11.1)$$

2.2.12 ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η γεωμετρία πολλών δισδιάστατων προβλημάτων απαιτεί τη χρήση πολικών συντεταγμένων για την ανάπτυξη μιας λύσης. Επειδή το υπό μελέτη πρόβλημα της παρούσας διπλωματικής αφορά κυκλική οπή, θα πρέπει να γίνει μετασχηματισμός των τάσεων από τα καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα, στο σύστημα πολικών συντεταγμένων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.13. Εκφράζοντας τις τροπές και τις τάσεις σε πολικές συντεταγμένες για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης προκύπτουν οι Εξς.(2.2.13.1-2.2.13.2).



Σχήμα 2.13: Πολικές Συντεταγμένες.

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$e_\theta = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.2.13.1)$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_r = \lambda(e_r + e_\theta) + 2\mu e_r$$

$$\sigma_\theta = \lambda(e_r + e_\theta) + 2\mu e_\theta$$

$$\sigma_z = \lambda(e_r + e_\theta) = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (2.2.13.2)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0$$

2.2.13 ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ AIRY

Η τασική συνάρτηση Airy είναι μια μαθηματική συνάρτηση που χρησιμοποιείται στον τομέα της ελαστικότητας για την περιγραφή της κατανομής των τάσεων σε ένα δισδιάστατο πρόβλημα. Αναπτύχθηκε από τον George Biddell Airy, Βρετανό μαθηματικό και φυσικό. Η συνάρτηση τάσεων Airy, που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα (ϕ), αποτελεί ένα βαθμωτό μέγεθος που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και συμβιβαστού των μετατοπίσεων. Με την εισαγωγή αυτής της συνάρτησης, οι συνιστώσες των τάσεων μπορούν να προκύψουν μέσω της χρήσης μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Το κύριο πλεονέκτημα της χρήσης της συνάρτησης τάσεων Airy είναι ότι απλοποιεί την ανάλυση των κατανομών τάσεων σε δισδιάστατα προβλήματα. Επιτρέπει τον προσδιορισμό των τάσεων, των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων με την εκτέλεση απλών αλγεβρικών πράξεων. Η συνάρτηση τάσης Airy χρησιμοποιείται συνήθως σε προβλήματα που αφορούν συνθήκες επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης, όπου οι συνιστώσες τάσης ή παραμόρφωσης μεταβάλλονται μόνο σε δύο διαστάσεις. Ταυτόχρονα, παρέχει ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση ενός ευρέος φάσματος προβλημάτων ελαστικότητας, συμπεριλαμβανομένων προβλημάτων με πολύπλοκες γεωμετρίες και συνοριακές συνθήκες.

Πρέπει ακόμα να αναφερθεί ότι η προσέγγιση της συνάρτησης τάσης Airy προϋποθέτει γραμμική ελαστικότητα, μικρές παραμορφώσεις και ισότροπα υλικά. Επομένως, ενδέχεται να μην είναι εφαρμόσιμη σε περιπτώσεις που περιλαμβάνουν μεγάλες παραμορφώσεις, μη γραμμικά υλικά ή ανισότροπα υλικά. Οι συναρτήσεις των τάσεων μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια της συνάρτησης Airy σύμφωνα με τις Εξς.(2.2.14.1) που αναγράφονται στην συνέχεια.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{2.2.14.1}$$

Για να διαμορφωθεί η τασική συνάρτηση Airy ορίζουμε τον διαρμονικό τελεστή της συνάρτησης, ο οποίος φαίνεται στην Εξ.(2.2.14.2) και για τον οποίο θα πρέπει να ισχύει:

$$\nabla_{\varphi}^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (2.2.14.2)$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης θεωρούμε συνάρτηση $\phi(r,\theta) = f(r)e^{b\theta}$. Αντικαθιστώντας αυτή την συνάρτηση στην Εξ.(2.2.14.2) και απαλείφοντας τους όρους $e^{b\theta}$ προκύπτει η Εξ.(2.2.14.3).

$$f^{(4)} + \frac{2}{r}f^{(3)} - \frac{1-2b^2}{r^2}f'' + \frac{1-2b^2}{r^3}f' + \frac{b^2(4+b^2)}{r^4}f = 0 \quad (2.2.14.3)$$

Για να λυθεί η παραπάνω εξίσωση κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $r = e^{\xi}$, οπότε η Εξ.(2.2.14.3) μετατρέπεται στην Εξ.(2.2.14.4) η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

$$f^{(4)} - 4f^{(3)} + (4 + 2b^2)f'' - 4b^2f' + b^2(4 + b^2)f = 0 \quad (2.2.14.4)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $f = e^{a\xi}$ προκύπτει η Εξ.(2.2.14.5) οι ρίζες της οποίας αναγράφονται στις Εξς.(2.2.14.6-2.2.14.7).

$$(a^2 + b^2)(a^2 - 4a + 4 + b^2) = 0 \quad (2.2.14.5)$$

$$a = \pm ib$$

$$a = 2 \pm ib \quad (2.2.14.6)$$

ή

$$b = \pm ia$$

$$b = 2 \pm ia \quad (2.2.14.7)$$

Εξετάζοντας μόνο περιοδικές λύσεις για $b=in$ όπου n ακέραιος. Επιλύοντας την εξίσωση για διάφορες τιμές του n οδηγούμαστε προκύπτει η γενική λύση της Εξ.(2.2.14.2) η οποία έχει την ονομασία λύση Michell (Michell solution) και έχει την μορφή της Εξ.(2.2.14.8). Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η γενική λύση περιορίζεται για περιοδικά προβλήματα καθώς έτσι μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος Fourier για τον χειρισμό γενικών οριακών συνθηκών.

$$\begin{aligned} \phi = & a_0 + a_1 \log r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log r + (a_4 + a_5 \log r + a_6 r^2 + a_7 r^2 \log r) \theta + \\ & \left(\alpha_{11} r + \alpha_{12} r \log r + \frac{\alpha_{13}}{r} + \alpha_{14} r^3 + \alpha_{15} r \theta + \alpha_{16} r \theta \log r \right) \cos \theta + \left(b_{11} r + b_{12} r \log r + \right. \\ & \left. \frac{b_{13}}{r} + b_{14} r^3 + b_{15} r \theta + b_{16} r \theta \log r \right) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_{n1} r^n + \alpha_{n2} r^{2+n} + \alpha_{n3} r^{-n} + \\ & \alpha_{n4} r^{2-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} (b_{n1} r^n + b_{n2} r^{2+n} + b_{n3} r^{-n} + b_{n4} r^{2-n}) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (2.2.14.8)$$

Η Εξ.(2.2.14.8) καλύπτει εξ' ορισμού την απαίτηση της Εξ.(2.2.14.2) οπότε πρέπει σε κάθε πρόβλημα να μεταβάλλεται ανάλογα, ώστε να ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

2.2.14 ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΑΣΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ AIRY

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση προβλημάτων το εντατικό πεδίο είναι ανεξάρτητο από την γωνία θ . Έτσι, μπορεί να διαμορφωθεί κατάλληλα η γενική λύση Michell ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη αυτή όπως φαίνεται στην Εξ.(2.2.14.1). Για την νέα τασική συνάρτηση τα μεγέθη των ορθών και διατμητικών τάσεων σε πολικές συντεταγμένες παρουσιάζονται στις Εξς.(2.2.14.2).

$$\phi = a_1 \log r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log r \quad (2.2.14.1)$$

$$\sigma_r = 2a_3 \log r + \frac{a_1}{r^2} + a_3 + 2a_2$$

$$\sigma_\theta = 2a_3 \log r - \frac{a_1}{r^2} + 3a_3 + 2a_2 \quad (2.2.14.2)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

2.3 Συγκέντρωση Τάσεων

2.3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η συγκέντρωση τάσεων αναφέρεται στην τοπική αύξηση της τάσης εντός ενός στερεού μέσου λόγω της παρουσίας μιας γεωμετρικής ανωμαλίας, όπως μια οπή ή μια αλλαγή στην επιφάνεια της διατομής. Για μια ομαλά μεταβαλλόμενη διατομή $A(x)$, η τάση θεωρείται πως είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Για απότομες όμως μεταβολές έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι η κατανομή των τάσεων δεν είναι ομοιόμορφη αλλά παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων στις περισσότερο καταπονούμενες διατομές, δηλαδή εκείνες με το μικρότερο εμβαδόν. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική αύξηση του μεγέθους της τάσης τοπικά, οδηγώντας σε πιθανή αστοχία.

2.3.2 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ (Σ.Σ.Τ)

Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (stress concentration factor) ονομάζεται ο αδιάστατος λόγος, που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα (K), της μέγιστης τάσης σ_{max} που αναπτύσσεται στην διατομή με το μικρότερο εμβαδόν προς την μέση τάση όπως φαίνεται και στην Εξ.(2.3.3.1).

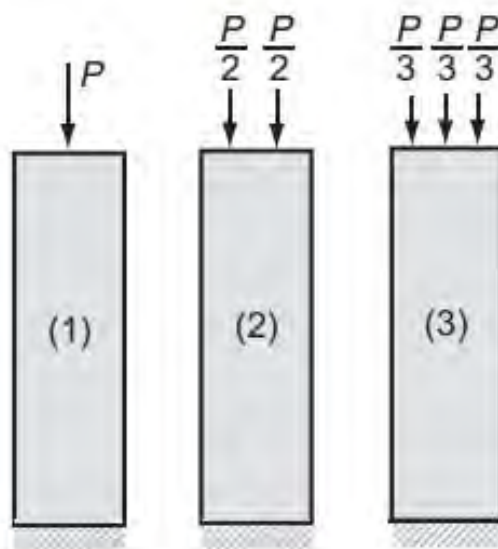
$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{\mu}} \quad (2.3.3.1)$$

2.3.3 ΑΡΧΗ SAINT-VENANT

Θεωρούμε τρεις πανομοιότυπους προβόλους στους οποίους ασκείται θλιπτικό φορτίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.12, η μόνη διαφορά των οποίων είναι τα σημεία ασκήσεων των δυνάμεων. Το συνολικό φορτίο που εφαρμόζεται σε κάθε πρόβλημα είναι πανομοιότυπο λόγω των στατικά ισοδύναμων φορτίσεων οπότε αναμένεται ότι τα πεδία τάσεων, παραμορφώσεων και μετατοπίσεων κοντά στην πάκτωση θα είναι περίπου τα ίδια. Αυτή η

συμπεριφορά μπορεί να γενικευτεί θεωρώντας ένα ελαστικό μέσο με αυθαίρετη φόρτιση $T^{(n)}$ στο σύνορο του τμήματος S , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.13. Η συγκεκριμένη οριακή φόρτιση θα παρήγαγε επιδράσεις μόνο στην περιοχή γύρω από το S . Με άλλα λόγια, αναμένουμε ότι σε σημεία μακριά από το S οι τάσεις εξαρτώνται περισσότερο από την προσκόπτουσα F_R των έλξεων παρά από την ακριβή κατανομή.

Με άλλα λόγια όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής της δύναμης παρατηρούμε ότι οι παραμορφώσεις τείνουν βαθμιαία να εξομαλυνθούν και έτσι μακριά από το σύνορο έχουμε μια σχεδόν ομοιόμορφη κατανομή της τάσης και της παραμόρφωσης σε όλη την επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής. Αυτές οι έννοιες αποτελούν την αρχή του Saint-Venant, η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Τα πεδία τάσεων, παραμορφώσεων και μετατοπίσεων που προκαλούνται από δύο διαφορετικές στατικά ισοδύναμες κατανομές δυνάμεων σε μέρη του σώματος μακριά από τα σημεία φόρτισης είναι περίπου τα ίδια.



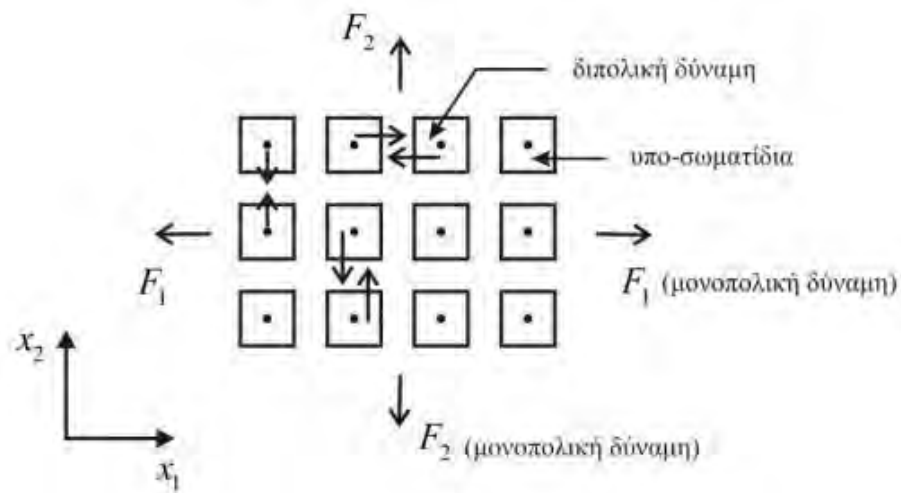
Σχήμα 2.14: Στατικά ισοδύναμα φορτία.

2.4 Θεωρία Τάσεων Ζεύγους

2.4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η θεωρία κλασικής ελαστικότητας του συνεχούς είναι μια προσέγγιση που βασίζεται στην υπόθεση ότι η ύλη είναι συνεχώς κατανεμημένη στο σώμα. Αυτή η θεωρία παρέχει μια λογική βάση για την ανάλυση των συμπεριφοράς των υλικών σε μακροκλίμακα, όπου η εξάρτηση από το μέγεθος μπορεί να παραμεληθεί. Πειραματικά έχει αποδειχθεί ωστόσο, ότι η μηχανική συμπεριφορά των υλικών σε μικρές κλίμακες είναι διαφορετική από τη συμπεριφορά τους σε μακροκλίμακες. Επομένως, πρέπει να αναπτύξουμε μια συνεπή εξαρτώμενη από το μέγεθος θεωρία, η οποία να λαμβάνει υπόψη τη μικροδομή των υλικών. Αυτή η θεωρία πρέπει να καλύπτει πολλές κλίμακες και, φυσικά, να ανάγεται στην κλασική θεωρία ελαστικότητας για προβλήματα μεγέθους μακροκλίμακας. Η ύπαρξη της ζεύγους τάσεων στα υλικά διατυπώθηκε αρχικά από τον Voigt (1887). Ωστόσο, ο Cosserat και Cosserat (1909) ήταν οι πρώτοι που ανέπτυξαν μια μαθηματική μοντέλο για την ανάλυση υλικών με ζεύγος τάσεων.

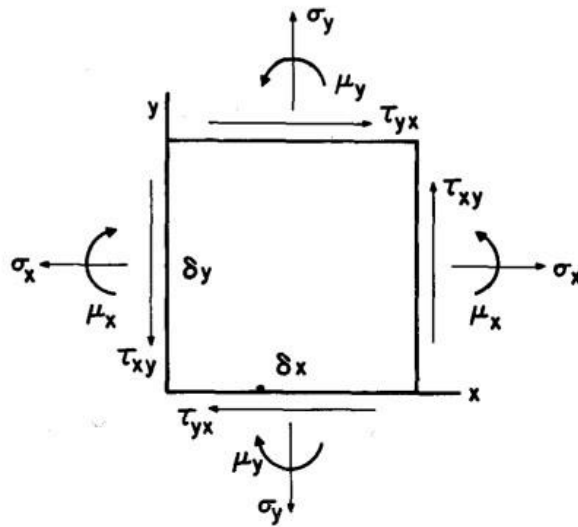
Η θεωρία τάσεων ζεύγους εισάγει την έννοια της μικροδομής του υλικού και θεωρεί ότι τα γειτονικά μόρια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με μονοπολικές (εσωτερικές) και διπολικές (εξωτερικές) δυνάμεις όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 2.15. Επιπλέον, θεωρεί ότι, μέσα σε ένα ελαστικό σώμα, οι επιφάνειες κάθε υλικού στοιχείου υπόκεινται όχι μόνο σε ορθές και εφαπτομενικές δυνάμεις αλλά και σε ροπές ανά μονάδα επιφάνειας που ονομάζονται τάσεις ζεύγους. Μια τέτοια παραδοχή φαίνεται κατάλληλη για υλικά με κοκκώδη ή κρυσταλλική δομή, όπου οι αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών στοιχείων μπορεί να εισάγει εσωτερικές ροπές.



Σχήμα 2.15: Μονοπολικές και διπολικές δυνάμεις σε υλικό με μικροδομή.

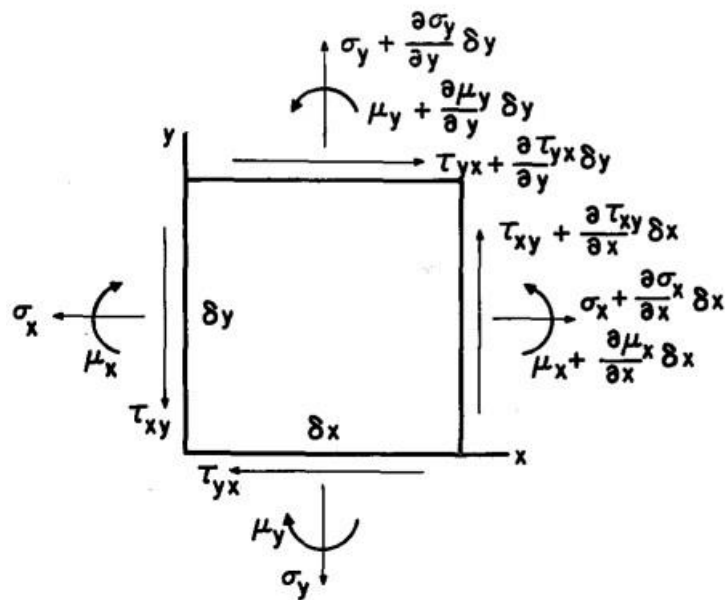
2.4.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Όπως και στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, θεωρούμε ένα στοιχειώδες κομμάτι υλικού έτσι ώστε να μπορούμε να αναλύσουμε και να σχεδιάσουμε τις ορθές τάσεις, τις διατμητικές τάσεις καθώς και τις ροπές ανά μονάδα επιφάνειας όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.16. Στην περίπτωση αυτή όπου το εντατικό πεδίο δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του στοιχείου η εξίσωση ισορροπίας ροπών, με θετική την ωρολογιακή φορά, δείχνει ότι οι διατμητικές τάσεις τ_{xy} και τ_{yx} ισούνται όπως φαίνεται και στην Εξ.(2.4.3.1). Στην γενική όμως περίπτωση όπου έχουμε μεταβαλλόμενο εντατικό πεδίο εκατέρωθεν του στοιχείου όπως απεικονίζεται το Σχήμα 2.17, η ισορροπία ροπών ως προς το κέντρο του στοιχείου και θετική την ωρολογιακή φορά, δίνει την Εξ.(2.4.3.1) από την οποία αγνοώντας τα διπλά διαφορικά ως πολύ μικρούς όρους και θέτοντας το πάχος $t=1$ προκύπτει η Εξ.(2.4.3.2). Διαπιστώνουμε έτσι ότι οι διατμητικές τάσεις τ_{xy} και τ_{yx} δεν είναι απαραίτητα ίσες όπως στην κλασική θεωρία ελαστικότητας, δηλαδή δεν ισχύει η αρχή της αμοιβαιότητας των διατμητικών τάσεων.



Σχήμα 2.16: Μη μεταβαλλόμενο εντατικό πεδίο.

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 &\Rightarrow -\tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot t \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot t \cdot \frac{dy}{2} \\ \frac{dy}{2} + \mu_x - \mu_x + \mu_y - \mu_y &= 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned} \quad (2.4.3.1)$$



Σχήμα 2.17: Μεταβαλλόμενο εντατικό πεδίο.

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0 \Rightarrow & -\tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \frac{dx}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot t \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot t \cdot \frac{dy}{2} + \\ & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot t \cdot \frac{dy}{2} + \mu_x - \left(\mu_x + \frac{\partial \mu_x}{\partial x} dx \right) + \mu_y - \left(\mu_y + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} dy \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.3.1)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0 \Rightarrow & -\tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot t \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot t \cdot \\ & \frac{dy}{2} + \mu_x - \left(\mu_x + \frac{\partial \mu_x}{\partial x} dx \right) + \mu_y - \left(\mu_y + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} dy \right) = 0 \Rightarrow -\tau_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} + \\ & \tau_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \frac{\partial \mu_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow -\tau_{xy} + \tau_{yx} + \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.3.2)$$

Σύμφωνα με το Σχήμα 2.16 λαμβάνοντας ισορροπία δυνάμεων ως προς τους άξονες x και y προκύπτουν οι Εξς.(2.4.3.3-2.4.3.4) οι οποίες είναι γνωστές και ως εξισώσεις ισορροπίας Cosserat.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_x + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.4.3.3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\sigma_y + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) - \tau_{xy} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.4.3.4)$$

2.4.3 ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

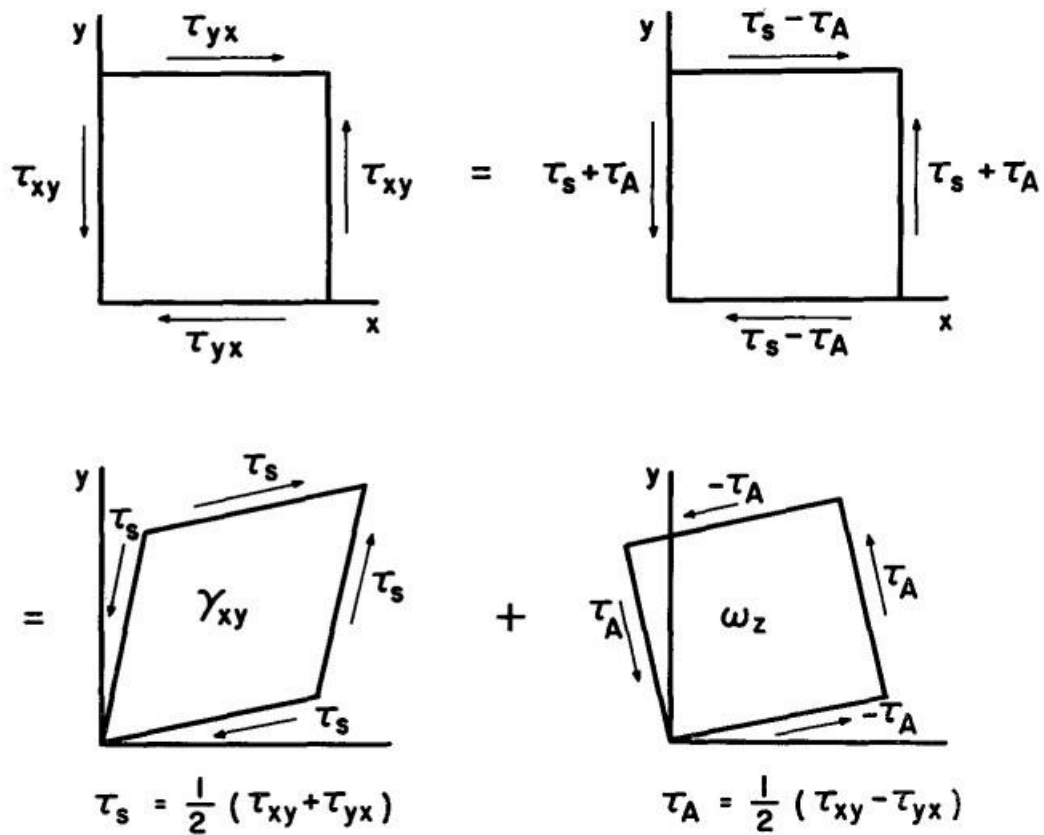
Σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης στο επίπεδο xy, οι συνιστώσες της μετατόπισης, u και v είναι συναρτήσεις μόνο των x και y καθώς η τρίτη συνιστώσα της μετατόπισης w ισούται με μηδέν. Τότε, σε ένα ισότροπο, ελαστικό μέσο, οι κανονικές συνιστώσες της παραμόρφωσης

συνδέονται με τις συνιστώσες της τάσης σύμφωνα με τις Εξς.(2.4.4.1) ενώ με τις συνιστώσες των μετατοπίσεων με τις Εξς.(2.4.4.2).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right)\end{aligned}\quad (2.4.4.1)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.4.4.2)$$

Ο τανυστής των διατμητικών τάσεων στην περίπτωση της θεωρίας τάσεων ζεύγους μπορεί να οριστεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού μέρους τ_s και ενός αντισυμμετρικού μέρους τ_A όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.18. Για το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό μέρος ισχύουν οι Εξς.(2.4.4.3-2.4.4.4).



Σχήμα 2.18: Συμμετρικό και αντισυμμετρικό κομμάτι διατμητικής τάσης.

$$\tau_s = \frac{1}{2}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (2.4.4.3)$$

$$\tau_A = \frac{1}{2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}) \quad (2.4.4.4)$$

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.18, το συμμετρικό μέρος της διατμητικής τάσης τ_A είναι εκείνο που συνεισφέρει στην γωνιακή παραμόρφωση. Σε αντίθεση, το αντισυμμετρικό μέρος δημιουργεί στροφή στερεού σώματος. Αυτό σημαίνει πως το αντισυμμετρικό κομμάτι δεν παράγει ένταση οπότε δεν λαμβάνεται υπόψιν στις καταστατικές εξισώσεις. Η μαθηματική εξίσωση της γωνιακής παραμόρφωσης συναρτήσει των διατμητικών τάσεων παρουσιάζεται στην Εξ.(2.4.4.5). Επιπλέον, η γωνιακή παραμόρφωση και η στροφή μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μετατοπίσεων σύμφωνα με τις Εξς.(2.4.4.7-2.4.4.8).

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_s = \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (2.4.4.5)$$

Όπου

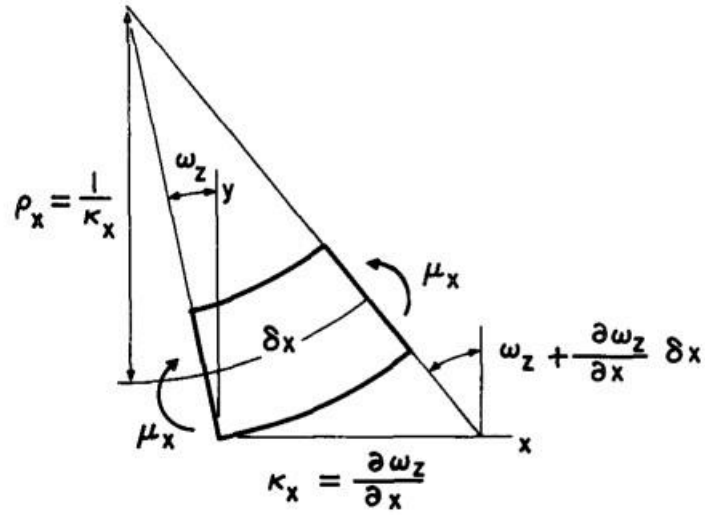
G είναι το μέτρο διάτμησης και η σχέση του με το μέτρο ελαστικότητας παρουσιάζεται στην Εξ. (2.4.4.6).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4.4.6)$$

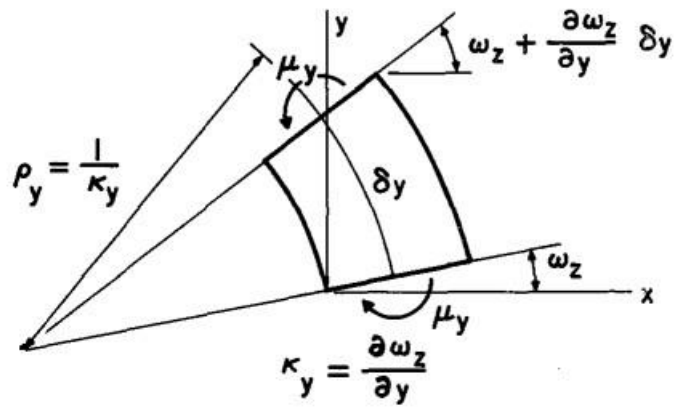
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4.4.7)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.4.4.8)$$

Οι τάσεις ζεύγους μ_x και μ_y δημιουργούν καμπυλότητες κατά τους άξονες x και y όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.19 και Σχήμα 2.20 αντίστοιχα. Από την γεωμετρία των σχημάτων προκύπτουν οι Εξς.(2.4.4.9-2.4.4.10) οι οποίες μπορούν να γραφτούν και συναρτήσει των τάσεων ζεύγους δίνοντας τις Εξς.(2.4.4.11-2.4.4.12).



Σχήμα 2.19: Καμπυλότητα κατά τον άξονα x.



Σχήμα 2.20: Καμπυλότητα κατά τον άξονα y.

$$\kappa_x = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad (2.4.4.9)$$

$$\kappa_y = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (2.4.4.10)$$

$$\kappa_x = \frac{1}{4B} \mu_x \quad (2.4.4.11)$$

$$\kappa_y = \frac{1}{4B} \mu_y \quad (2.4.4.12)$$

Όπου

B είναι το μέτρο καμπυλότητας

2.4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Απαλείφοντας τις μετατοπίσεις μεταξύ των Εξς.(2.4.4.2-2.4.4.7) προκύπτει η εξίσωση συμβιβαστού των τάσεων όπως φαίνεται στην Εξ.(2.4.4.13). Ομοίως, απαλείφοντας την περιστροφή από τις Εξς.(2.4.4.9-2.4.4.10) προκύπτει η εξίσωση συμβιβαστού των καμπυλοτήτων όπως φαίνεται στην Εξ.(2.4.4.14). Επιπλέον, από τις Εξς.(2.4.4.2-2.4.4.7-2.4.4.8) προκύπτουν οι Εξς.(2.4.4.15-2.4.4.16). Αντικαθιστώντας τις τελευταίες στις Εξς.(2.4.4.9-2.4.4.10) προκύπτουν οι εξισώσεις συμβιβαστού των καμπυλοτήτων σε συνάρτηση με τις παραμορφώσεις όπως φαίνεται στις Εξς.(2.4.4.17-2.4.4.18).

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.4.4.13)$$

$$\frac{\partial \kappa_x}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \quad (2.4.4.14)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \quad (2.4.4.15)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad (2.4.4.16)$$

$$\kappa_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \quad (2.4.4.17)$$

$$\kappa_y = \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad (2.4.4.18)$$

Οι εξισώσεις συμβιβαστού μπορούν να εκφραστούν ως προς τις τάσεις και τις τάσεις-ζεύγη χρησιμοποιώντας τις καταστατικές σχέσεις των Εξς.(2.4.4.1-2.4.4.5) και των σχέσεων

τάσεων ζεύγους-καμπυλότητας των Εξς.(2.4.4.11-2.4.4.12) με αποτέλεσμα τις Εξς.(2.4.4.19-2.4.4.22).

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \cdot \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (2.4.4.19)$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x} \quad (2.4.4.20)$$

$$\mu_x = l^2 \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - 2l^2 \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (2.4.4.21)$$

$$\mu_y = 2l^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) - l^2 \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (2.2.4.22)$$

$$l^2 = \frac{2(1+\nu)B}{E} = \frac{B}{G} \quad (2.2.4.23)$$

2.4.5 ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η Εξ.(2.4.3.3) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει συνάρτηση ϕ_1 η οποία να ικανοποιεί τις Εξς.(2.4.5.1). Αντίστοιχα η Εξ.(2.4.3.4) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη συνάρτηση ϕ_2 ώστε να ικανοποιούνται οι Εξς.(2.4.5.2) ενώ τέλος από την Εξ.(2.4.4.20) προκύπτει η απαίτηση να υπάρχει συνάρτηση ψ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την Εξ.(2.4.5.3).

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad (2.4.5.1)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (2.4.5.2)$$

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \mu_y &= \frac{\partial \psi}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.4.5.3}$$

Εάν εισάγουμε τις Εξς.(2.4.5.1-2.4.5.3-2.4.5.4) στην αρχική εξίσωση ισορροπίας ροπών Εξ.(2.4.3.4) τότε προκύπτει η Εξ.(2.4.5.4). Αυτή η εξίσωση αποτελεί με την σειρά της ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη συνάρτησης ϕ τέτοια ώστε να προκύπτουν οι Εξς.(2.4.5.5). Αντικαθιστώντας την συνάρτηση ϕ στις Εξς.(2.4.5.1-2.4.5.2) μπορούμε να γράψουμε τις τάσεις συναρτήσει της τασικής συνάρτησης ϕ όπως φαίνεται στις Εξς.(2.4.5.6).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 \right) = 0\tag{2.4.5.4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\tag{2.4.5.5}$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial y}\tag{2.4.5.6}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις των τάσεων διαπιστώνουμε ότι όλες οι συναρτήσεις εξαρτώνται από δύο τασικές συναρτήσεις ϕ , ψ . Εάν $\psi=0$ τότε από ότι φαίνεται και στις Εξς.(2.4.5.3) δεν έχουμε καθόλου τάσεις ζεύγους και οι Εξς.(2.4.5.6) παίρνουν την μορφή των εξισώσεων της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας καθώς εξαρτώνται μόνο από την τασική συνάρτηση $\text{Airy } \phi$. Αντικαθιστώντας την Εξ.(2.4.5.6) στην Εξ.(2.4.4.19) προκύπτει η Εξ.(2.4.5.7) η οποία είναι η διαφορική συνάρτηση που πρέπει να ικανοποιεί η τασική συνάρτηση ϕ . Όπως και στην κλασική ελαστικότητα η συνάρτηση που πρέπει να ικανοποιεί η ϕ παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από τις τάσεις ζεύγους. Από την άλλη, αντικαθιστώντας τις Εξς.(2.4.5.3-2.4.5.6) στις Εξς.(2.4.4.21-2.4.4.22) προκύπτουν οι Εξς.(2.4.5.8) οι οποίες αποτελούν τις εξισώσεις που συνδέουν τις δύο τασικές συναρτήσεις ϕ και ψ .

2.4.6 ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Καθώς το υπό μελέτη πρόβλημα αφορά κυκλική οπή είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός των εντατικών μεγεθών από τις καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές συντεταγμένες. Στο Σχήμα 2.20 αναπαρίσταται οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους και στα δύο συστήματα συντεταγμένων. Οι μαθηματικές εκφράσεις για τα εντατικά μεγέθη μετά την μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες φαίνονται στις Εξς.(2.4.6.1).

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\
 \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\
 \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\
 \tau_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\
 \mu_r &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \\
 \mu_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{2.4.6.1}$$

2.4.7 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως και στην κλασική θεωρία ελαστικότητας, για να ολοκληρωθεί η θεωρία τάσεων ζεύγους πρέπει να οριστούν οι καταστατικές εξισώσεις ώστε να μπορούν να συνδεθούν τα εντατικά με τα παραμορφωσιακά μεγέθη. Πιο συγκεκριμένα για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης σε πολικές συντεταγμένες ισχύουν οι Εξς.(2.4.6.2).

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta) \\
 e_\theta &= \frac{1+\nu}{E} (-\nu \cdot \sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta) \\
 e_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{2E} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r})
 \end{aligned}
 \tag{2.4.6.2}$$

Κεφάλαιο 3 Επίλυση Προβλήματος

3.1 Βήματα Επίλυσης

3.1.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΦΟΡΤΙΣΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΟΠΗΣ

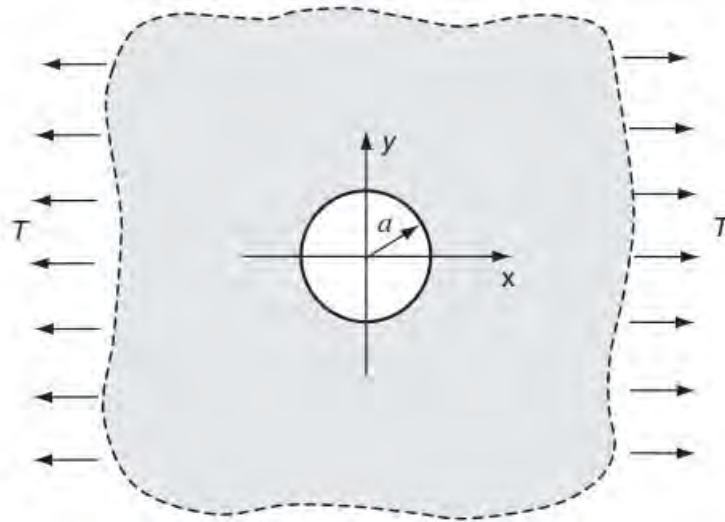
Το αρχικό πρόβλημα που μελετήθηκε ήταν αυτό του άπειρο μέσου με αφόρτιστη κυκλική οπή, υποβαλλόμενο σε μονοαξονικό εφελκυσμό κατά την οριζόντια διεύθυνση, σύμφωνα με την κλασική θεωρία ελαστικότητας όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Πρώτο βήμα, ήταν η εισαγωγή σε υπολογιστικό φύλλο του εμπορικού προγράμματος Mathematica της τασικής συνάρτησης Airy. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2.2.13, χρησιμοποιήθηκε η γενική λύση Michell της συνάρτησης Airy, η οποία τροποποιήθηκε κατάλληλα ώστε να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Για να γίνει αξιοποίηση της συμμετρίας του προβλήματος, επιλέχθηκαν οι όροι του αξονοσυμμετρικού προβλήματος, που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2.2.14, και οι όροι $\cos(2\theta)$ καθώς η συνάρτηση είναι συμμετρική για $\theta=\pi/2$ και $\theta=3\pi/2$ και δίνει πεπερασμένες τιμές. Οι εξαρτώμενοι όροι από τις συναρτήσεις $\sin(\theta)$ και $\cos(\theta)$ αμελήθηκαν καθώς δεν έδιναν συμμετρικές τιμές στα σημεία ενδιαφέροντος $\theta=\pi/2$ και $\theta=3\pi/2$. Τα διαγράμματα των συναρτήσεων $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$ αναπαρίστανται στα Σχήματα 3.1, 3.2, 3.3 και Σχήμα 3.4 αντίστοιχα. Επιπλέον, από τους όρους του αξονοσυμμετρικού προβλήματος τέθηκαν οι σταθερές α_3 και α_{22} ίσες με μηδέν καθώς όπως φαίνεται στις Εξ.(3.1.1.1-3.1.1.2-3.1.1.3) δημιουργούσαν απειρία των τάσεων στο απομακρυσμένο πεδίο λόγω των συναρτήσεων $\log(r)$. Έτσι προέκυψε η Εξ.(3.1.1.4) για την οποία θεωρώντας την πιο της απλή μορφή και θέτοντας $n=2$ προέκυψε η Εξ.(3.1.1.5).

$$\sigma_r = \alpha_3(1 + 2 \log r) + 2a_2 + \frac{a_1}{r^2} - (2a_{21} + \frac{6a_{23}}{r^4} + \frac{4a_{24}}{r^2}) \cos(2\theta) \quad (3.1.1.1)$$

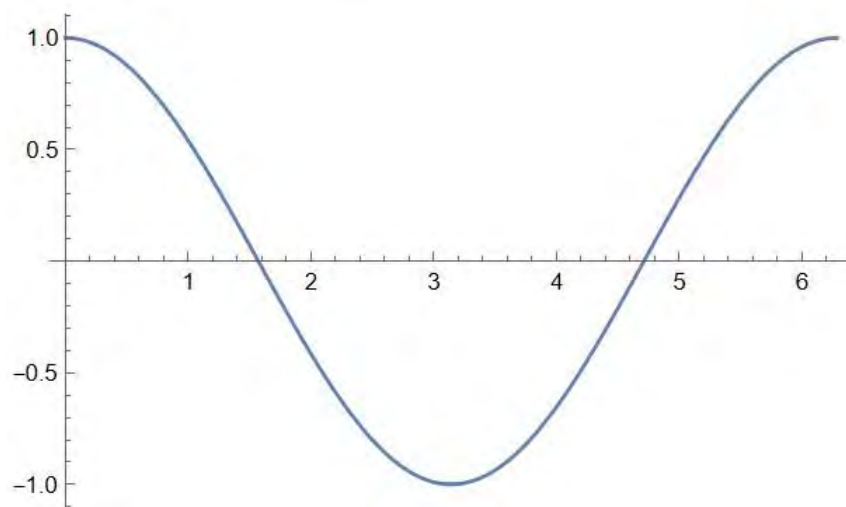
$$\sigma_{\theta} = a_3(3 + 2 \log r) + 2a_2 - \frac{a_1}{r^2} + 12a_{21} + (2a_{21} + 12a_{22}r^4 + \frac{6a_{23}}{r^4}) \cos(2\theta) \quad (3.1.1.2)$$

$$\tau_{r\theta} = (2a_{21} + 6a_{22}r^2 - \frac{6a_{23}}{r^4} - \frac{2a_{24}}{r^2}) \sin(2\theta) \quad (3.1.1.3)$$



Σχήμα 3.1: Άπειρο μέσο με αφόρτιστη σπή υπό ομοιόμορφη φόρτιση εφελκυσμού μακρινού πεδίου.

`Plot[Cos[θ], {θ, 0, 2 Pi}]`
 [διά... [συνημίτονο [π

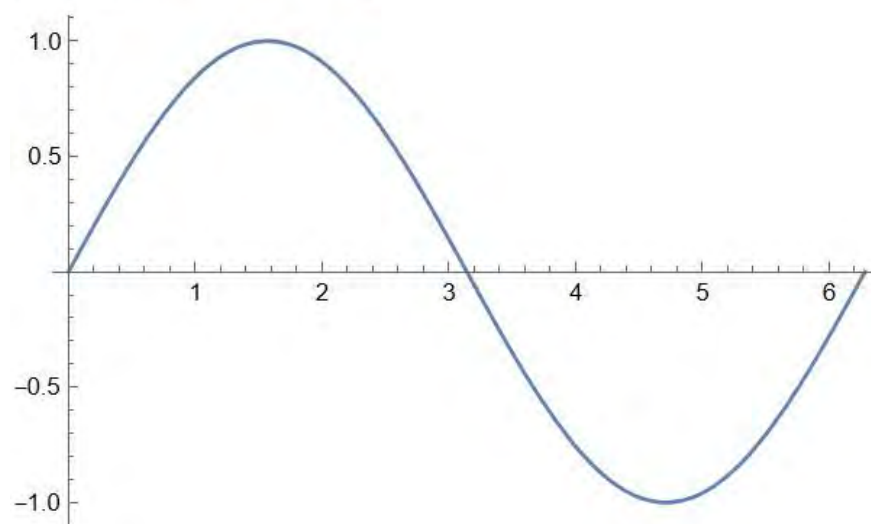


Σχήμα 3.2: Διάγραμμα συνάρτησης $\cos(\theta)$.

```
Plot[Sin[θ], {θ, 0, 2 Pi}]
```

[διά... ημίτονο

[π

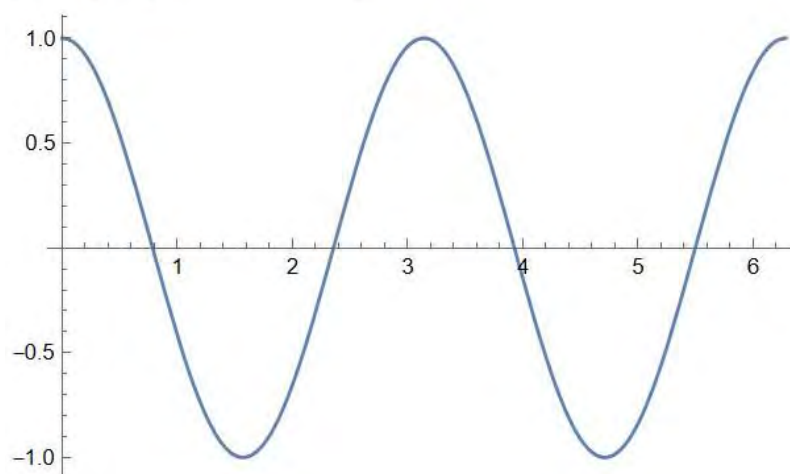


Σχήμα 3.3: Διάγραμμα συνάρτησης $\sin(\theta)$.

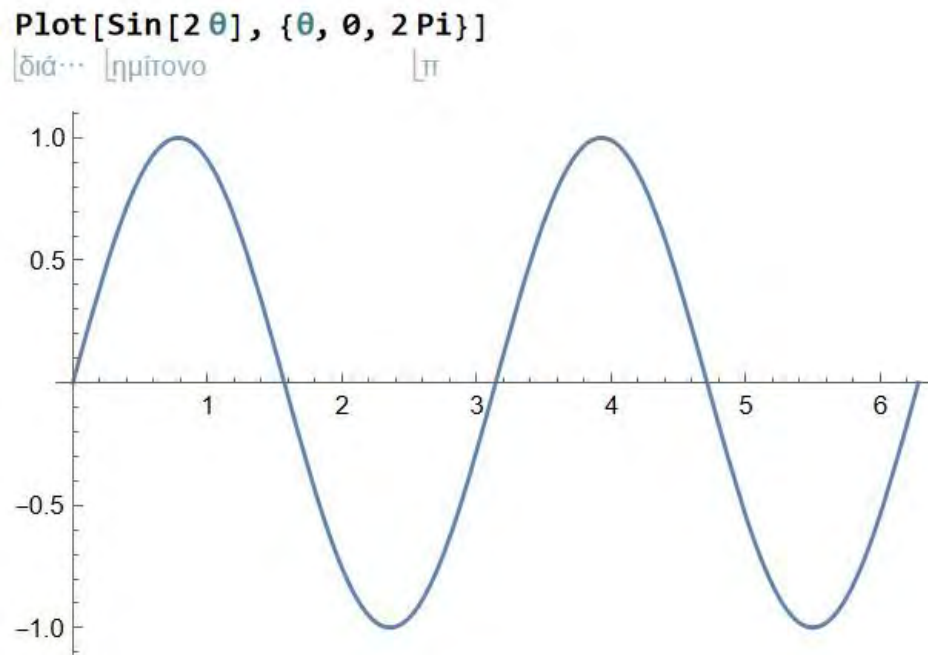
```
Plot[Cos[2 θ], {θ, 0, 2 Pi}]
```

[διά... συνημίτονο

[π



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα συνάρτησης $\cos(2\theta)$.



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα συνάρτησης $\sin(2\theta)$.

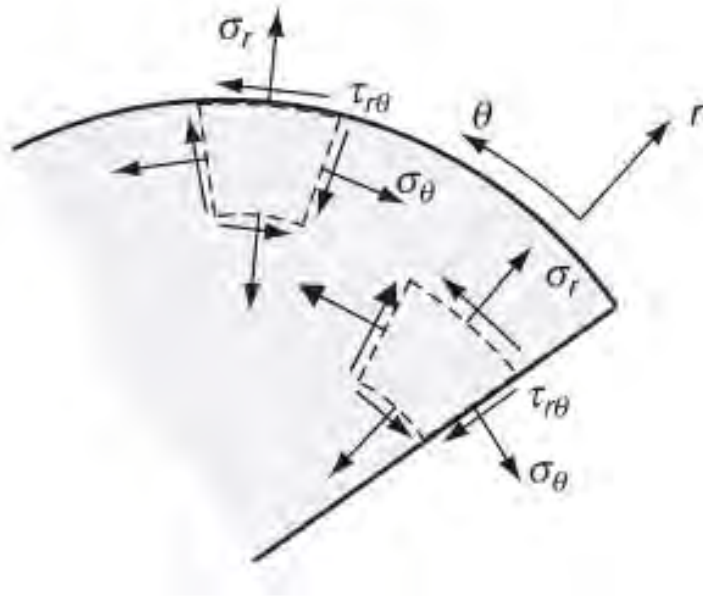
$$\phi = a_1 \log_r + a_2 r^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_{n1} r^n + \alpha_{n2} r^{2+n} + \alpha_{n3} r^{-n} + \alpha_{n4} r^{2-n}) \cos(n\theta)$$

(3.1.1.4)

$$\phi = a_1 \log_r + a_2 r^2 + (\alpha_{21} r^2 + \alpha_{23} r^{-2} + \alpha_{24}) \cos(2\theta) \quad (3.1.1.5)$$

Δεύτερο βήμα ήταν η διατύπωση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος. Επειδή το πρόβλημα αφορούσε αφόρτιστη κυκλική οπή, υπήρχε η απαίτηση για μηδενισμό των συνοριακών τάσεων στο χείλος της οπής σύμφωνα με το Σχήμα 3.6. Έτσι, προέκυψαν οι δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες οι οποίες φαίνονται στις Εξς.(3.1.1.6-3.1.1.7). Η πρώτη εξίσωση είναι εξαρτώμενη από την γωνία θ , οπότε για να αποφευχθεί η εξάρτηση των σταθερών από την γωνία, η εξίσωση έσπασε σε δύο επιμέρους κομμάτια. Οι άλλες δύο συνοριακές συνθήκες αφορούσαν το απομακρυσμένο πεδίο τάσεων στο οποίο υπήρχε η

απαίτηση να ισούνται με την επιβαλλόμενη τάση T όπως φαίνεται στις Εξς.(3.1.1.8-3.1.1.9). Για να γίνει μετατροπή της επιβαλλόμενης τάσης T από το καρτεσιανό σύστημα στο πολικό σύστημα συντεταγμένων έγινε χρήση των Εξς.(3.1.1.10) για τις οποίες ισχύει $\sigma_x=T$, $\sigma_y=\tau_{xy}=0$. Επιλύθηκε το σύστημα 5 εξισώσεων με τους 5 αγνώστους με την βοήθεια του προγράμματος Mathematica και της εντολής Solve οπότε προέκυψαν οι σταθερές α_1 , α_2 , α_{21} , α_{23} , α_{24} όπως φαίνεται στις Εξς.(3.1.1.11).



Σχήμα 3.6: Συνοριακές τάσεις κλασική θεωρία ελαστικότητας.

$$\sigma_{rr} = 0, r \rightarrow \alpha \quad (3.1.1.6)$$

$$\tau_{r\theta} = 0, r \rightarrow \alpha \quad (3.1.1.7)$$

$$\sigma_{rr} - \frac{T}{2}(1 - \cos(2\theta)) = 0, r \rightarrow \infty \quad (3.1.1.8)$$

$$\tau_{r\theta} + \frac{T}{2}\sin(2\theta) = 0, r \rightarrow \infty \quad (3.1.1.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (3.1.1.10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

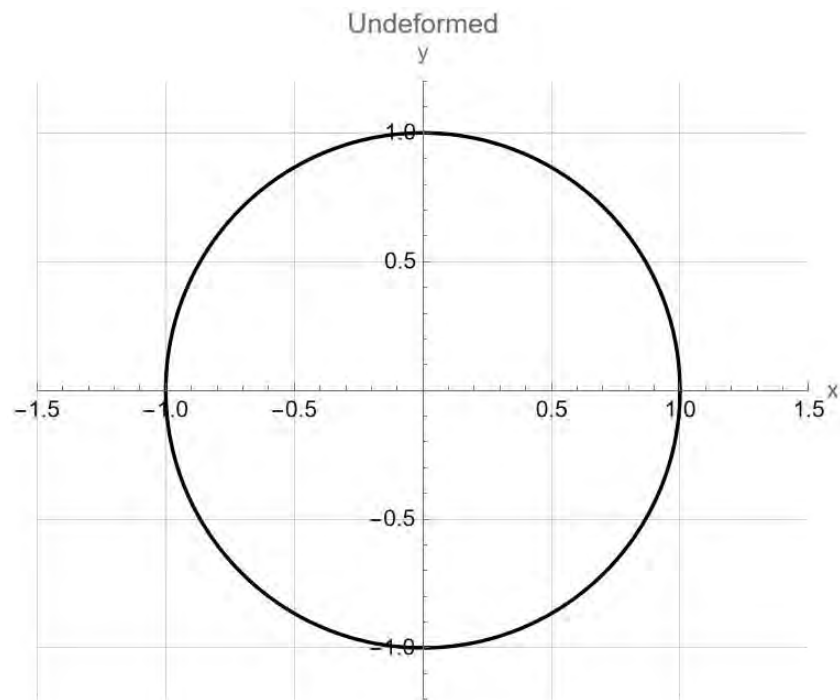
$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{a^2 T}{2} \\
a_2 &= \frac{T}{4} \\
a_{21} &= -\frac{T}{4} \\
a_{23} &= -\frac{a^4 T}{4} \\
a_{24} &= \frac{a^2 T}{2}
\end{aligned}
\tag{3.1.1.11}$$

Όπου

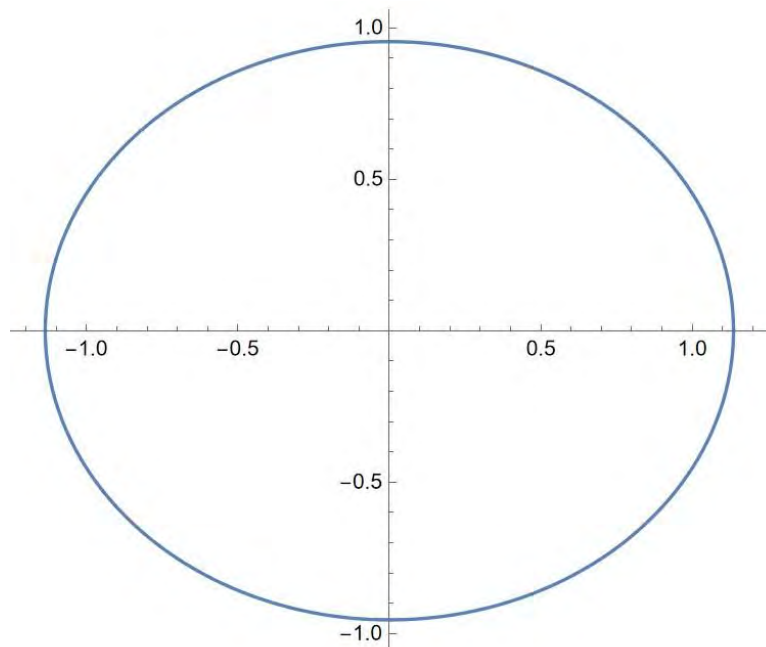
a είναι η ακτίνα της οπής

Αφού υπολογίστηκαν οι σταθερές, αντικαταστάθηκαν στις εξισώσεις των τάσεων για να προκύψουν οι τελικές αριθμητικές τιμές τους. Στην συνέχεια, μέσω των καταστατικών εξισώσεων υπολογίστηκαν οι παραμορφώσεις και μέσω αυτών οι μετατοπίσεις. Επόμενο βήμα ήταν ο σχεδιασμός της αρχικής και της παραμορφωμένης κατάστασης της οπής όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.7, 3.8 και 3.9. Για λόγους ευκολίας των πράξεων τέθηκε η ακτίνα της οπής $a=1$ και η εφελκυστική τάση $T=1$.

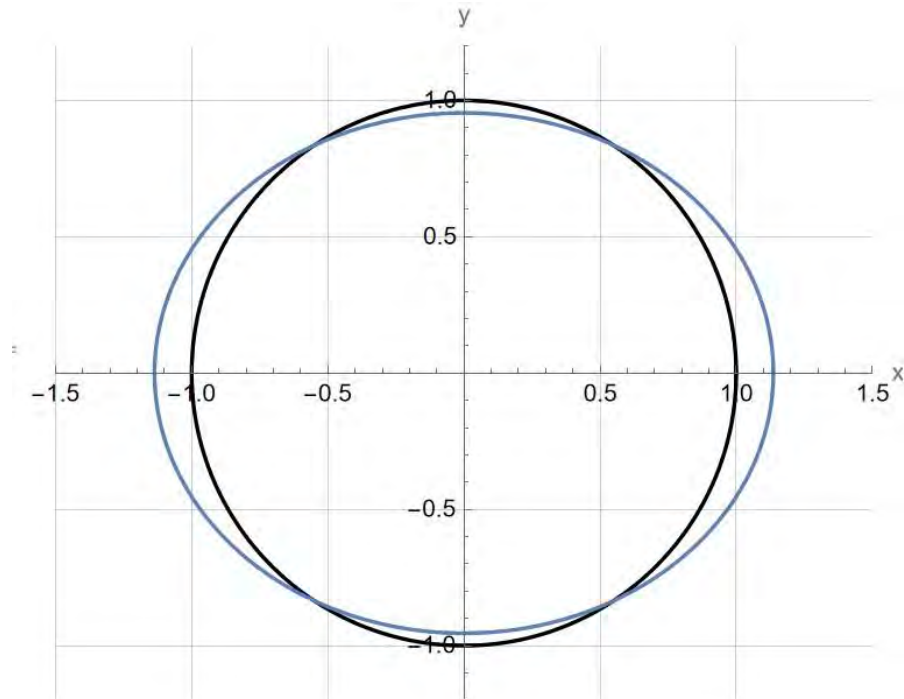
Τελικό βήμα ήταν ο προσδιορισμός του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης για $\theta=\pi/2$ ή $\theta=3\pi/2$, όπου παρατηρείται η κρίσιμη διατομή λόγω του ελάχιστου εμβαδού, και χρησιμοποιώντας με την Εξ.(2.3.3.1) υπολογίστηκε ο Σ.Σ.Τ. Όλοι οι υπολογισμοί του προβλήματος έγιναν με χρήση του προγράμματος Mathematica ο κώδικας του οποίου αναγράφεται αναλυτικά στο Παράρτημα Α.



Σχήμα 3.7: Απαραμόρφωτη κατάσταση οπής για $\alpha=1$.



Σχήμα 3.8: Παραμορφωμένη κατάσταση οπής για $\alpha=1$.



Σχήμα 3.9: Σύγκριση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης οπής για $\alpha=1$ κλασική θεωρία ελαστικότητας.

Το ίδιο πρόβλημα επιλύθηκε χρησιμοποιώντας αυτή την φορά την θεωρία τάσεων ζεύγους. Έτσι, επιλέχθηκαν με αντίστοιχο τρόπο με την θεωρία κλασικής ελαστικότητας οι δύο τασικές συναρτήσεις ϕ και ψ και εισήχθησαν στο υπολογιστικό φύλλο του προγράμματος Mathematica όπως φαίνεται στις Εξς.(3.1.1.12-3.1.1.13).

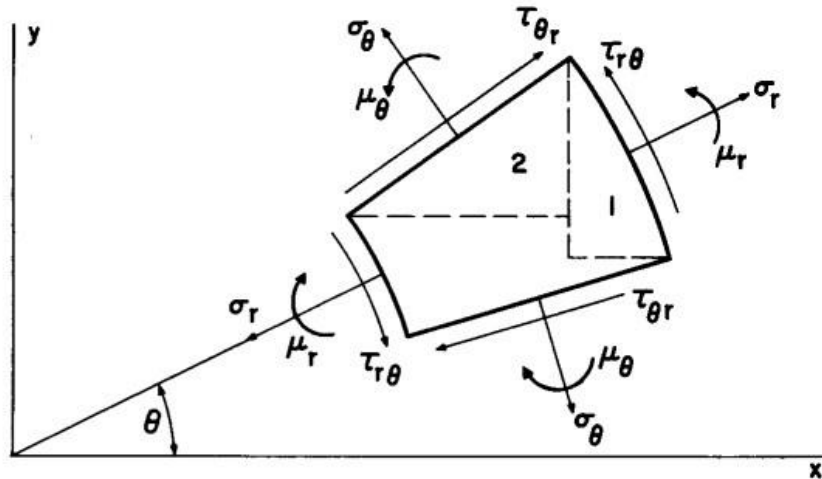
$$\phi = \frac{T}{4} r^2 (1 - \cos(2\theta)) + A \log r + \left(\frac{B}{r^2} + C\right) \cos(2\theta) \quad (3.1.1.12)$$

$$\psi = \left(\frac{D}{r^2} + E \left(\frac{2l}{r} K_1\left(\frac{r}{l}\right) + K_0\left(\frac{r}{l}\right)\right)\right) \sin(2\theta) \quad (3.1.1.13)$$

Όπου

K_1, K_0 συναρτήσεις Bessel

Στην συνέχεια, μέσω των Εξς.(2.4.6.1) υπολογίστηκαν οι τάσεις συναρτήσει των σταθερών A, B, C, D, E. Επόμενο βήμα, ήταν ο προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών όπως φαίνεται στις Εξς.(3.1.1.14). Η διαφορά της θεωρίας τάσεων ζεύγους με την κλασική θεωρία ελαστικότητας είναι πως υπήρχε απαίτηση να μηδενίζεται και η ροπή ανά μονάδα επιφάνειας μ_r στο σύνορο της οπής όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11. Επιλύθηκε το σύστημα με την χρήση του λογισμικού και προέκυψαν οι σταθερές όπως φαίνονται στις Εξς.(3.1.1.15). Στην συνέχεια, έγινε αντικατάσταση των σταθερών στις συναρτήσεις των τάσεων για να προκύψουν οι αριθμητικές τιμές τους. Ακολούθησε ο υπολογισμός των παραμορφώσεων μέσω των καταστατικών εξισώσεων που περιεγράφηκαν στο Κεφάλαιο 2.4.7 με τις Εξς.(2.4.6.2). Τέλος, δόθηκαν συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους του λόγου Poisson (ν), του μέτρου ελαστικότητας (E) και του χαρακτηριστικού μήκους l της μικροδομής του υλικού, ώστε να σχεδιασθεί το διάγραμμα της παραμορφωμένης κατάστασης. Στο Σχήματα 3.12 απεικονίζεται η παραμορφωμένη κατάσταση της οπής ενώ στο Σχήμα 3.13 απεικονίζεται η παραμορφωμένη κατάσταση συγκριτικά με την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση.



Σχήμα 3.10: Συνοριακές τάσεις θεωρίας τάσεων ζεύγους.

$$\sigma_r = 0, r \rightarrow \alpha$$

$$\tau_{r\theta} = 0, r \rightarrow \alpha$$

$$\mu_r = 0, r \rightarrow \alpha$$

(3.1.1.14)

$$\sigma_r - \frac{T}{2}(1 + \cos(2\theta)) = 0, r \rightarrow \infty$$

$$\tau_{r\theta} + \frac{T}{2} \sin(2\theta) = 0, r \rightarrow \infty$$

$$A = -\frac{Ta^2}{2}$$

$$B = -\frac{Ta^4(1-F)}{4(1+F)}$$

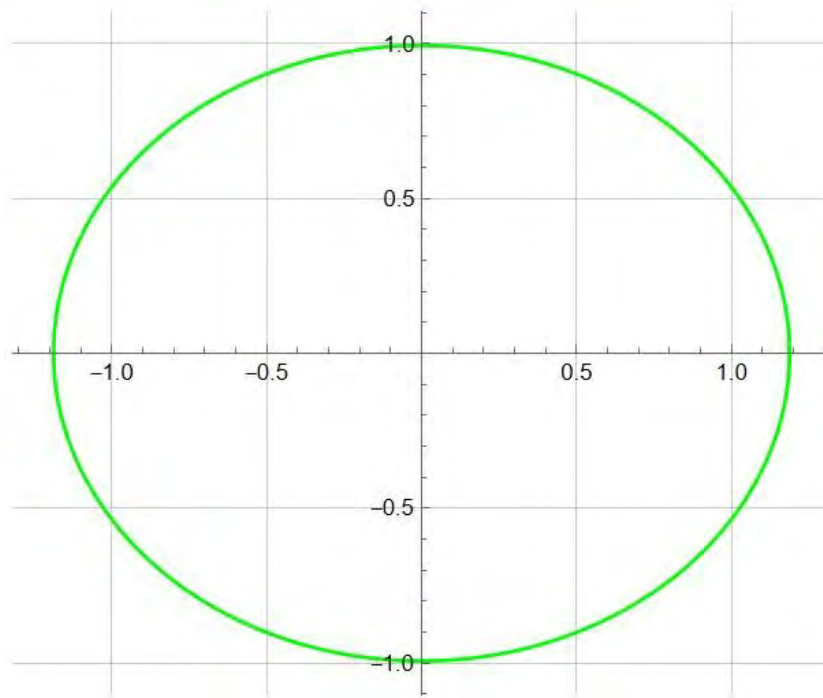
$$C = \frac{Ta^2}{2(1+F)} \quad (3.1.1.15)$$

$$D = \frac{4(1-\nu)a^2l^2T}{1+F}$$

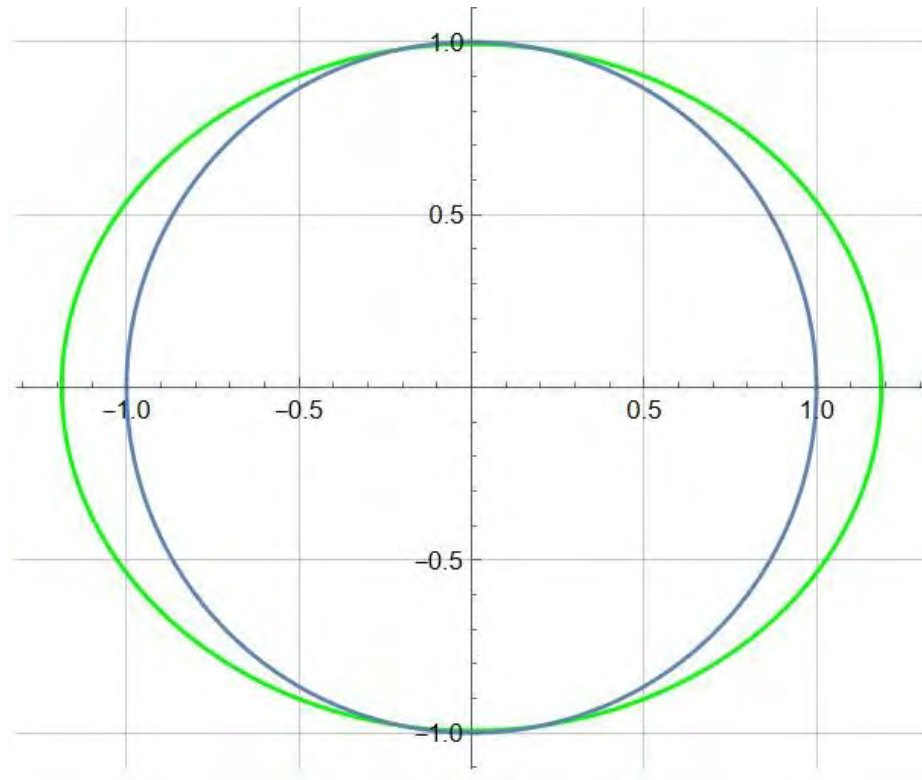
$$E = \frac{TalF}{(1+F)K_1\left(\frac{a}{l}\right)}$$

Όπου

$$F = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2aK_0\left(\frac{a}{l}\right)}{lK_1\left(\frac{a}{l}\right)}} \quad (3.1.1.16)$$



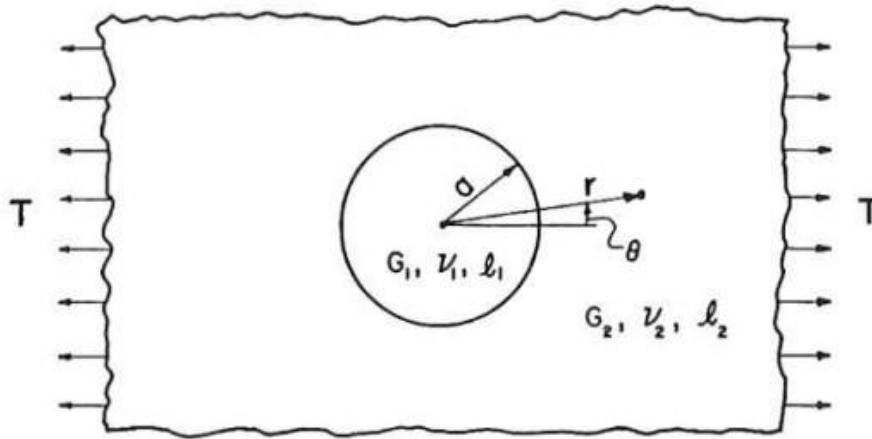
Σχήμα 3.11: Παραμορφωμένη κατάσταση οπής για $\alpha=1$ θεωρία τάσεων ζεύγους.



Σχήμα 3.12: Σύγκριση απαραμόρφωτης και παραμορφωμένης κατάστασης οπής για $\alpha=1$ θεωρία τάσεων ζεύγους.

3.1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΣΟΥ

Το δεύτερο πρόβλημα που επιλύθηκε ήταν αυτό του άπειρου μέσου με κυκλική οπή υποβαλλόμενο σε μονοαξονικό εφελκυσμό αυτή τη φορά για διαφορετικά υλικά εγκλείσματος της οπής (G1) και περιβάλλοντος μέσου (G2) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.14. Οι υπολογισμοί έγιναν μόνο για την θεωρία τάσεων ζεύγους και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας που προκύπτουν από την βιβλιογραφία, ώστε να διαπιστωθεί η επιρροή της θεωρίας τάσεων ζεύγους.



Σχήμα 3.13: Άπειρο μέσο με διαφορετικά υλικά εγκλείσματος και περιβάλλοντος χώρου υπό ομοιόμορφη φόρτιση εφελκυσμού μακρινού πεδίου.

Ως πρώτο βήμα, εισήχθησαν σε υπολογιστικό φύλλο του προγράμματος Wolfram Mathematica οι τασικές συναρτήσεις για κάθε υλικό. Στην Εξ.(3.1.2.1) φαίνονται οι εξισώσεις των τασικών συναρτήσεων για το έγκλεισμα ($0 < r < a$) ενώ στην Εξ.(3.1.2.2) αναγράφονται οι τασικές συναρτήσεις του περιβάλλοντος υλικού ($a < r < \infty$). Για το έγκλεισμα αμελήθηκαν οι όροι εκείνου όπου οδηγούσαν σε απειρισμό των τάσεων για $r=0$.

$$\phi_1 = Ar^2 + Br^2 \cos(2\theta) + Ca^{-2}r^4 \cos(2\theta)$$

$$\psi_1 = 24(1 - \nu_1)Cl_1^{-2}r^2 \sin(2\theta) + Da^2I_2\left(\frac{r}{l_1}\right) \sin(2\theta) \quad (3.1.2.1)$$

$$\phi_2 = \frac{T}{4}r^2(1 - \cos(2\theta)) + Ea^2 \cdot \log(r) + Fa^4r^{-2} \cos(2\theta) + Ma^2 \cos(2\theta)$$

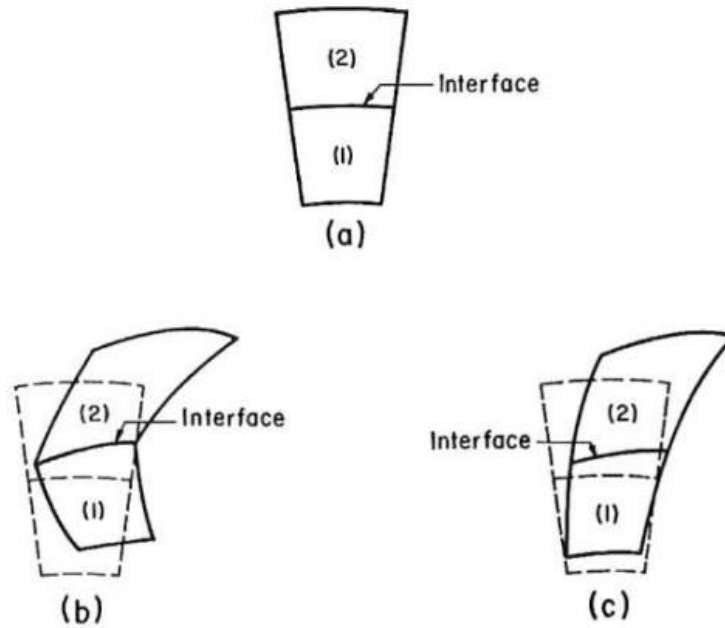
$$\psi_2 = 8(1 - \nu_2)Ml_2^{-2}a^4r^{-2} \sin(2\theta) + Ha^2K_2\left(\frac{r}{l_2}\right) \sin(2\theta) \quad (3.1.2.2)$$

Όπου

I_2, K_2 συναρτήσεις Bessel 2^{ης} τάξης

Στην συνέχεια, υπολογίστηκαν οι ορθές και διατμητικές τάσεις, οι τάσεις ζεύγους, οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις συναρτήσεων των σταθερών και έπειτα έγινε εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος ώστε να επιλυθεί το σύστημα. Σε αυτό το πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες αφορούν μόνο την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση στην διεπιφάνεια των δύο υλικών. Αναγκαία συνθήκη αποτελούσε η συνέχεια

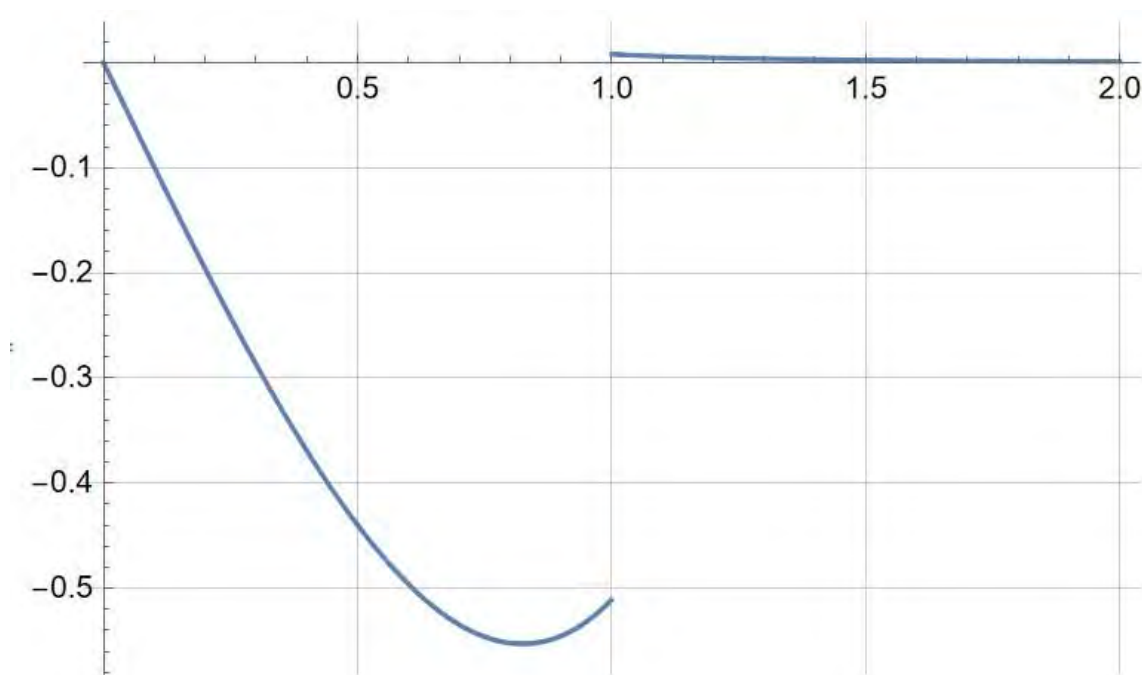
των συνοριακών τάσεων και οι συνθήκες συνέχεια των μετακινήσεων και στροφών. Η συνθήκη συμβιβαστού των μετακινήσεων της θεωρίας τάσεων ζεύγους συγκριτικά με την αντίστοιχη συνθήκη της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας στο Σχήμα 3.15 στο οποίο παρατηρούμε ότι η θεωρία τάσεων ζεύγους θέτει επιπλέον περιορισμούς για τις στροφές των μελών. Με αυτόν τον τρόπο οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος παρουσιάζονται στις Εξς.(3.1.2.3).



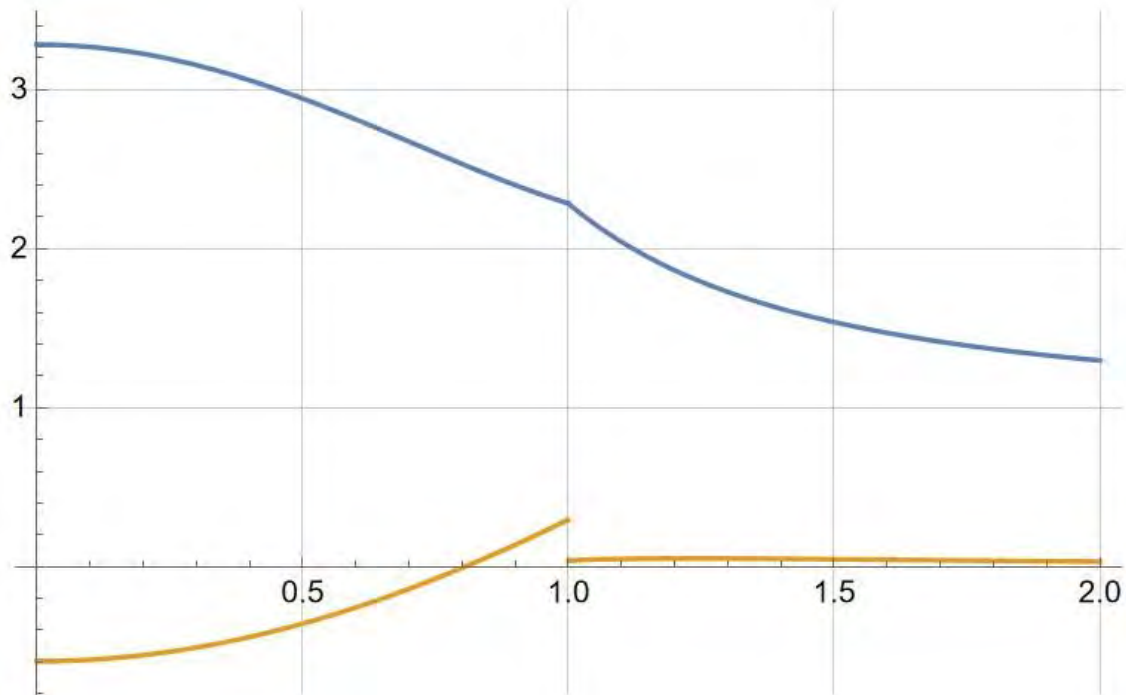
Σχήμα 3.14: α) Διεπιφάνεια υλικών, β) Συνθήκη συμβιβαστού μετακινήσεων κλασική θεωρία ελαστικότητας, γ) Συνθήκη συμβιβαστού μετακινήσεων και στροφών θεωρία τάσεων ζεύγους.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(1)}(a, \theta) &= \sigma_r^{(2)}(a, \theta) \\
 \tau_{r\theta}^{(1)}(a, \theta) &= \tau_{r\theta}^{(2)}(a, \theta) \\
 \mu_r^{(1)}(a, \theta) &= \mu_r^{(2)}(a, \theta) \\
 u_r^{(1)}(a, \theta) &= u_r^{(2)}(a, \theta) \\
 u_\theta^{(1)}(a, \theta) &= u_\theta^{(2)}(a, \theta) \\
 \omega_{r\theta}^{(1)}(a, \theta) &= \omega_{r\theta}^{(2)}(a, \theta)
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2.3}$$

Αφού επιλύθηκε το σύστημα με την χρήση του προγράμματος Wolfram Mathematica έγινε αντικατάσταση των σταθερών στα εντατικά και παραμορφωσιακά μεγέθη για να προκύψουν οι αριθμητικές εκφράσεις τους. Στα Σχήμα 3.16 και Σχήμα 3.17 υπολογίστηκαν οι συνοριακές τάσεις και συνοριακές τάσεις ζεύγους για να επαληθευτεί η ασυνέχεια των τάσεων που βρίσκονται στην ίνα της διατομής. Το Σχήμα 3.16 αποτελεί το διάγραμμα της μεταβολής της τάσης ζεύγους μ_θ συναρτήσει της ακτίνας a για $\theta=\pi/2$ rad. Στο σημείο όπου η ακτίνα ισούται με την μονάδα, δηλαδή στην διεπιφάνεια των δύο υλικών παρατηρούμε πως υπάρχει ασυνέχεια. Το Σχήμα 3.17 αποτελεί τα διαγράμματα μεταβολής των ορθών τάσεων σ_r και σ_θ συναρτήσει της ακτίνας a για $\theta=0$ rad. Με μπλε χρώμα συμβολίζεται η ορθή τάση σ_r ενώ με πορτοκαλί η ορθή τάση σ_θ . Στο σημείο όπου η ακτίνα ισούται με την μονάδα, δηλαδή στην διεπιφάνεια των δύο υλικών, η σ_r είναι συνεχής καθώς αποτελεί συνοριακή τάση ενώ η σ_θ παρουσιάζει ασυνέχεια.

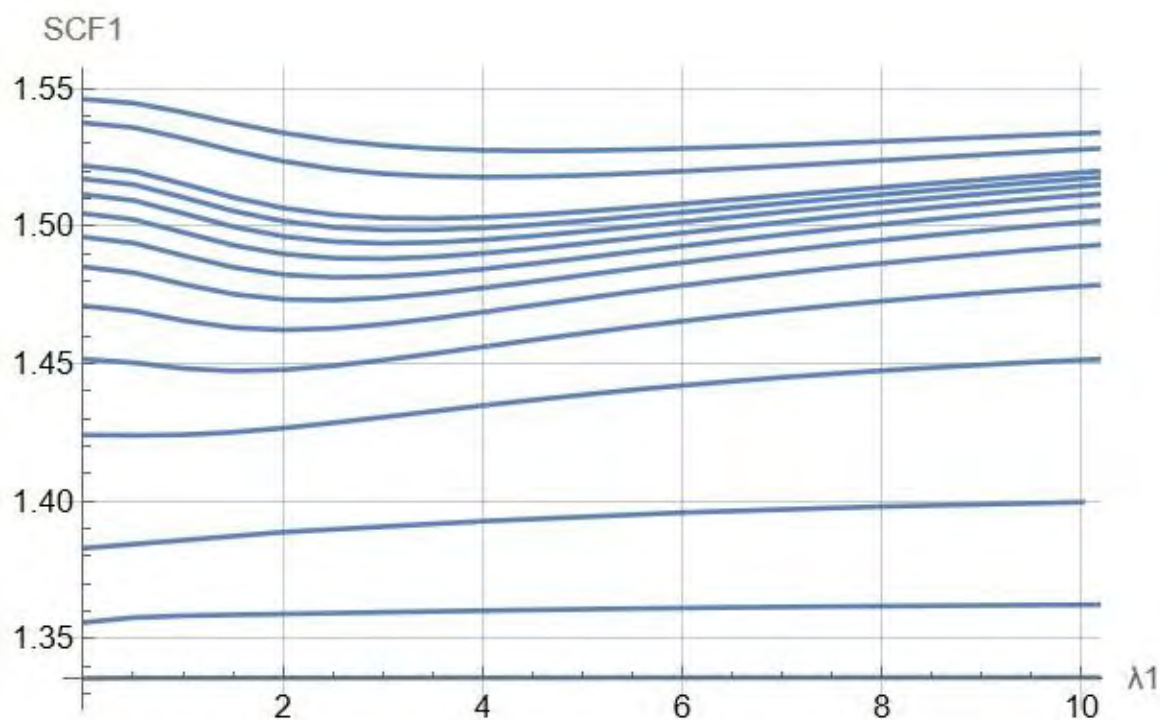


Σχήμα 3.15: Μεταβολή τάσης ζεύγους μ_θ .

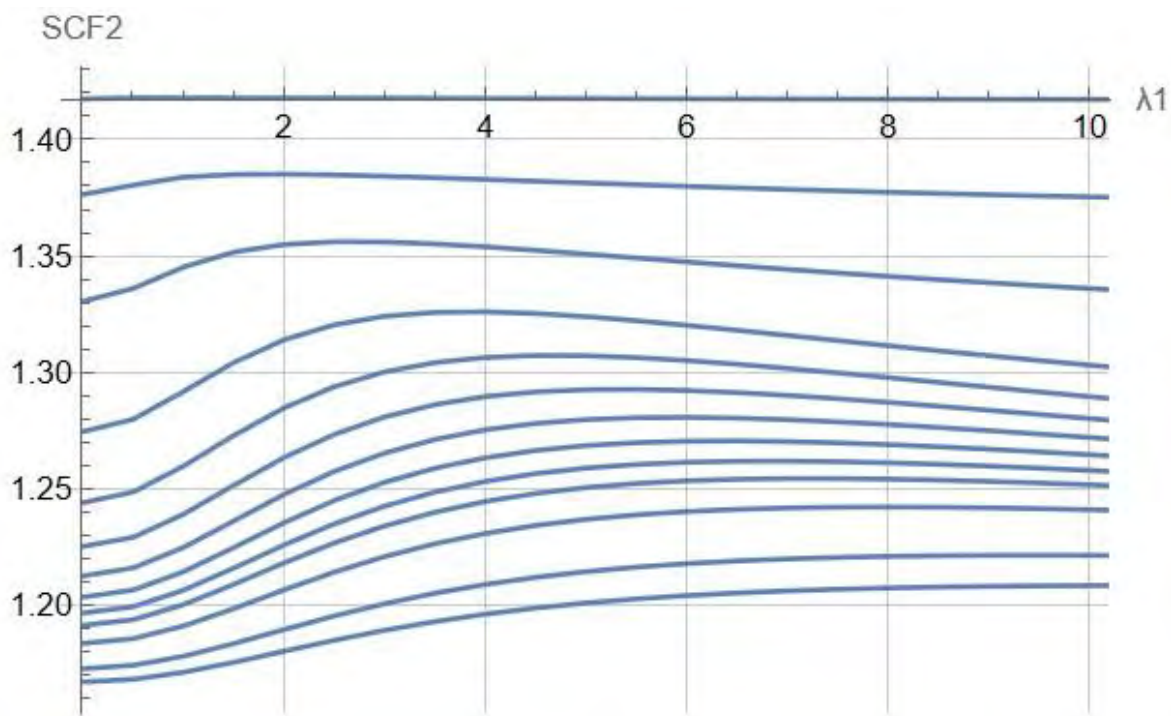


Σχήμα 3.16: Μεταβολή ορθών τάσεων σ και θ .

Τελικό βήμα της επίλυσης του δεύτερου προβλήματος αποτελούσε ο προσδιορισμός του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης όπου για τον προσδιορισμό του έπρεπε να γίνει διαχωρισμός περιπτώσεων συγκριτικά με τα μέτρα διάτμησης των δύο υλικών ορίζοντας τον λόγο $g=G_1/G_2$. Στην περίπτωση όπου $G_1>G_2$ ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης υπολογίστηκε ως το πηλίκο της μέγιστης ορθής τάσης σ_1 προς την επιβαλλόμενη τάση καθώς ύστερα από δοκιμές στο υπολογιστικό πρόγραμμα Mathematica διαπιστώθηκε ότι ήταν αυτή η δυσμενέστερη περίπτωση. Αντίστοιχα, για $G_1<G_2$ χρησιμοποιήθηκε η ορθή τάση σ_2 για τον υπολογισμό του αντίστοιχου συντελεστή. Ο αναλυτικός κώδικας αναγράφεται στο Παράρτημα Α ενώ στα Σχήματα 3.17 και 3.18 παρουσιάζονται τα διαγράμματα μεταβολής του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης συναρτήσει των $\lambda_1=\alpha/l_1$ και $\lambda_2=\alpha/l_2$ για κάθε περίπτωση.

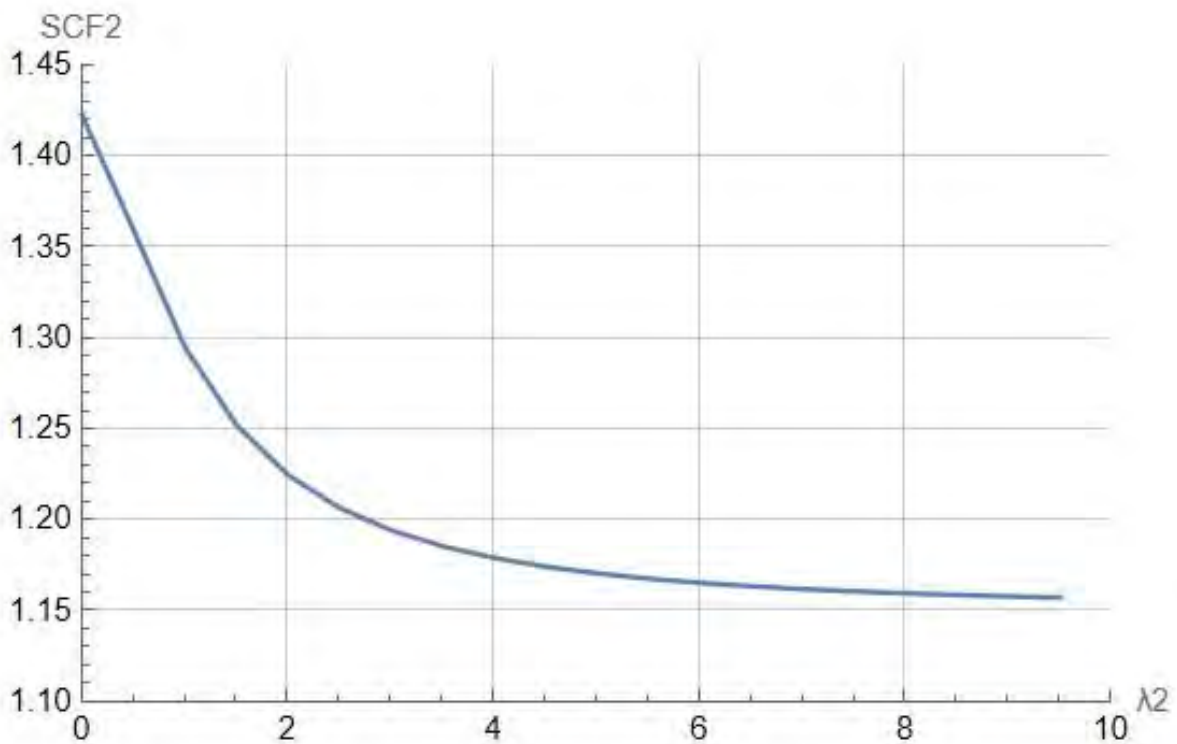


Σχήμα 3.17: Μεταβολή Σ.Σ.Τ.(1) συναρτήσει των λ_1, λ_2 για $g=1/2$, $v_1=1/4$, $v_2=1/3$ με χρήση του λογισμικού Mathematica.

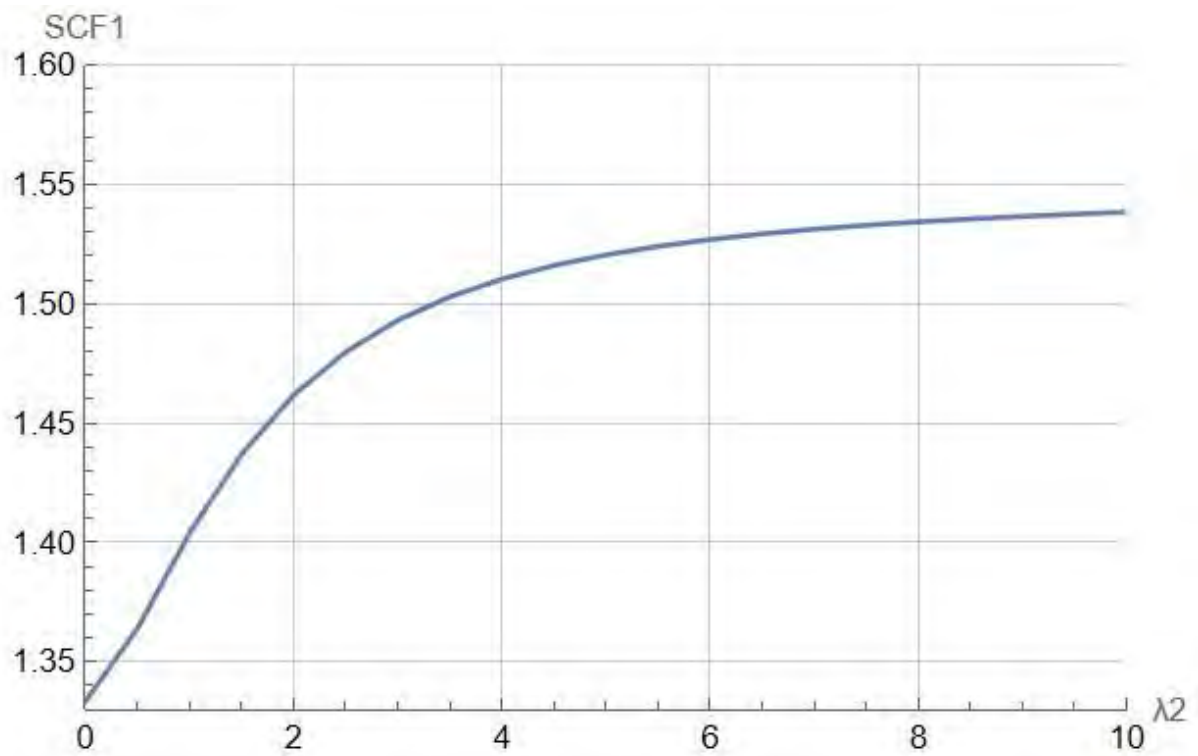


Σχήμα 3.18: Μεταβολή Σ.Σ.Τ.(2) συναρτήσει των λ_1, λ_2 για $g=2$, $v_1=1/4$, $v_2=1/3$ με χρήση του λογισμικού Mathematica.

Επιπρόσθετα, στις απεικονίσεις των Σχημάτων 3.19 και 3.20 οι οποίες παριστάνουν την μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης για $g>0$ και $g<0$ αντίστοιχα για την περίπτωση όπου το χαρακτηριστικό μήκος του εγκλείσματος l_1 τείνει στο μηδέν, ισοδύναμα λ_1 τείνει άπειρο, θα παρατηρήσουμε ότι η τιμή πλησιάζει την βιβλιογραφική τιμή της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας η οποία είναι 1,15 και 1,55 αντίστοιχα. Αυτό αποτελεί ιδιομορφία του συγκεκριμένου προβλήματος και δεν ισχύει καθολικά σε όλες τις περιπτώσεις.



Σχήμα 3.19: Μεταβολή Σ.Σ.Τ.(2) συναρτήσει του λ_2 για $l_1=0$, $g=2$, $\nu_1=1/4$, $\nu_2=1/3$ με χρήση του λογισμικού Mathematica.



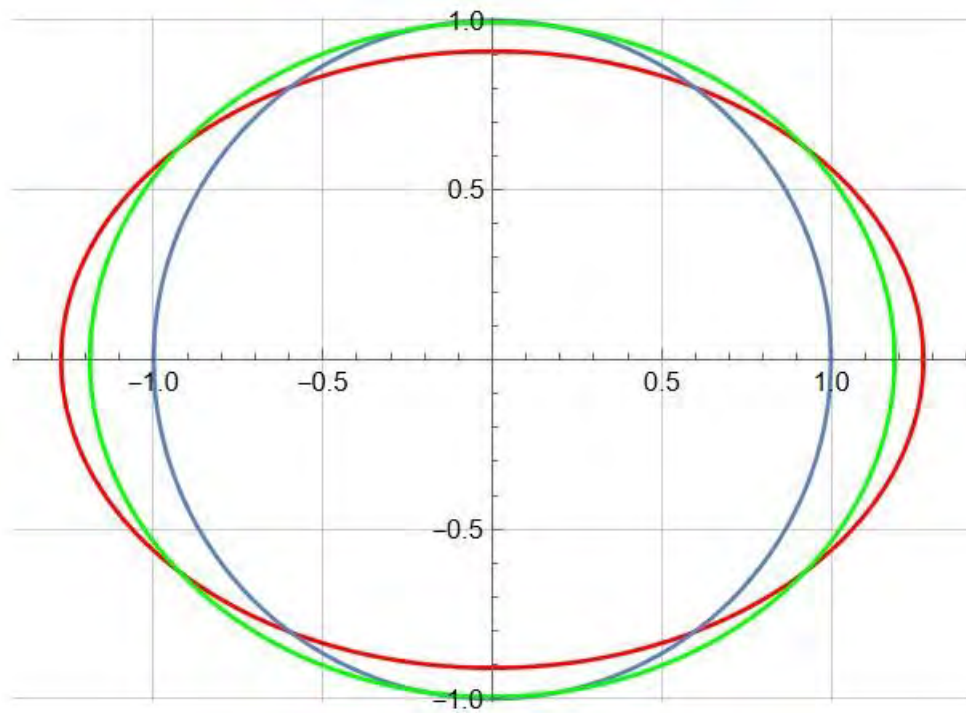
Σχήμα 3.20: Μεταβολή Σ.Σ.Τ.(1) συναρτήσει του λ_2 για $l_1=0$, $g=1/2$, $\nu_1=1/4$, $\nu_2=1/3$ με χρήση του λογισμικού Mathematica.

Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα

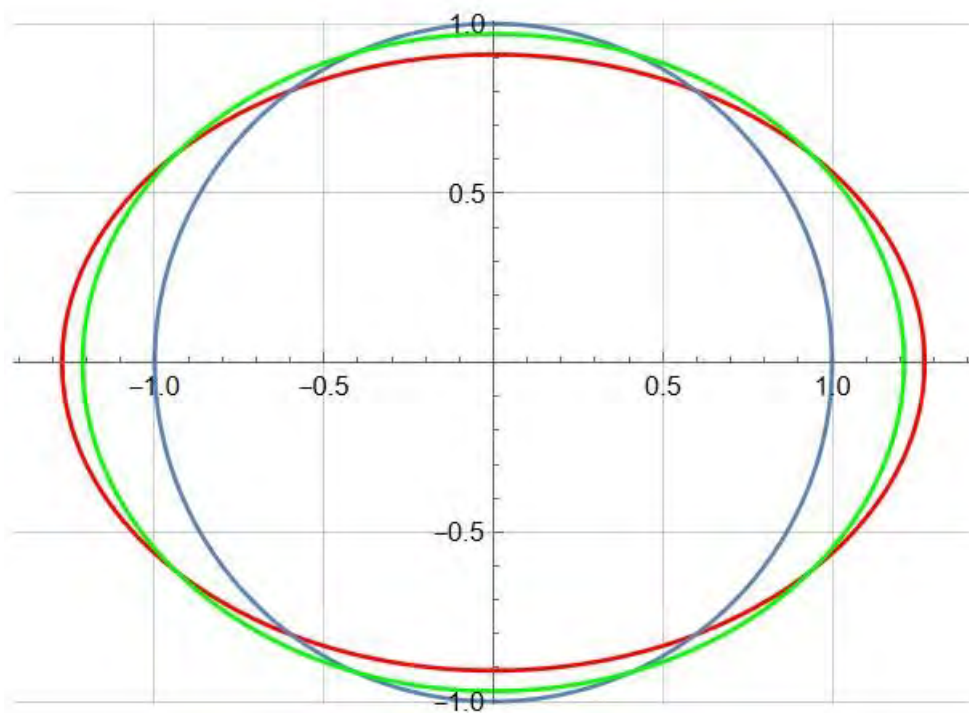
4.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΦΟΡΤΙΣΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΟΠΗΣ

Από την Εξ.(3.1.12) μπορούμε να διαπιστώσουμε πως αν το υλικό δεν έχει μικροδομή, δηλαδή $l=0$ τότε ισχύει η Εξ.(4.1.1) και προκύπτει ότι οι τιμές των συντελεστών A, B, C, D σε αυτήν την περίπτωση δεν διαφέρουν από τις τιμές που δίνει η κλασική θεωρία ελαστικότητας. Έτσι, η θεωρία τάσεων ζεύγους ανάγεται στην κλασική θεωρία ελαστικότητας. Για τιμές του l διαφορετικές του μηδενός, παρατηρούμε από τα διαγράμματα της παραμορφωμένης κατάστασης ότι όσο ο λόγος a/l είναι μικρός, η κατάσταση της παραμορφωμένης κατάστασης διαφέρει σημαντικά στις δύο θεωρίες ξεκινώντας με απόκλιση ίση με 10% για $a/l=1$. Όταν όμως το πηλίκο αυτό μεγαλώνει παύοντας δηλαδή τα δύο αυτά μεγέθη να είναι συγκρίσιμα τότε η παραμορφωμένη εικόνα της οπής για την θεωρία τάσεων ζεύγους σταδιακά πλησιάζει και εξισώνεται με την παραμορφωμένη κατάσταση της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας όπως βλέπουμε στα Σχήματα 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 και 4.6 για διαφορετικές τιμές του λόγου a/l . Με την μπλε γραμμή συμβολίζεται η απαραμόρφωτη κατάσταση, με πράσινη η παραμορφωμένη κατάσταση της θεωρίας τάσεων ζεύγους και με κόκκινη η παραμορφωμένη κατάσταση της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας.

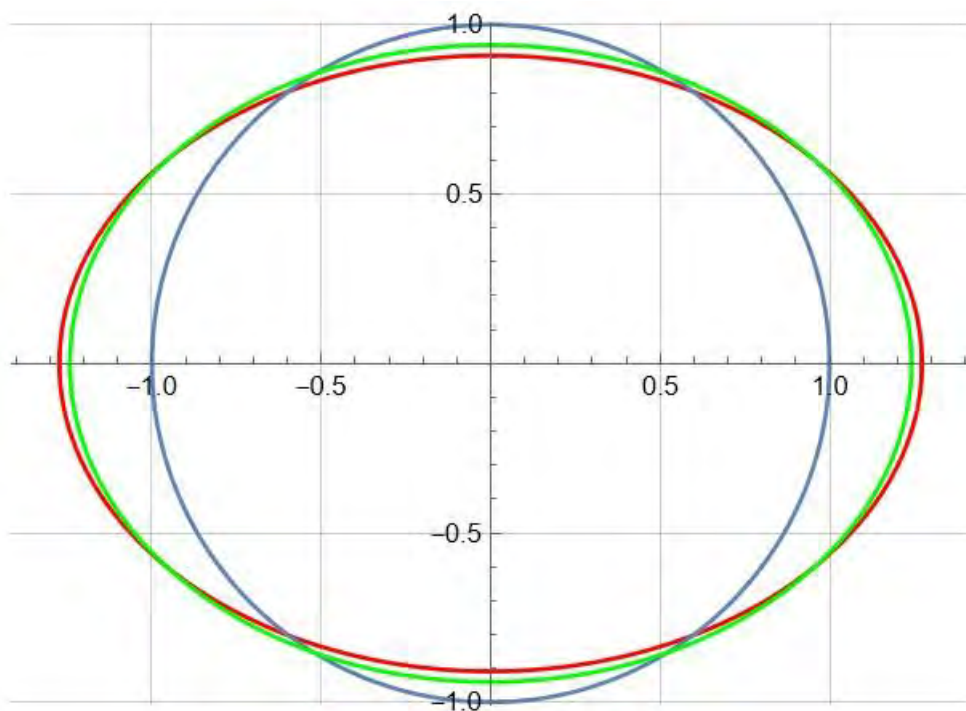
$$\lim_{\frac{a}{l} \rightarrow \infty} \frac{K_0\left(\frac{a}{l}\right)}{K_1\left(\frac{a}{l}\right)} = 1 \quad (4.1.1)$$



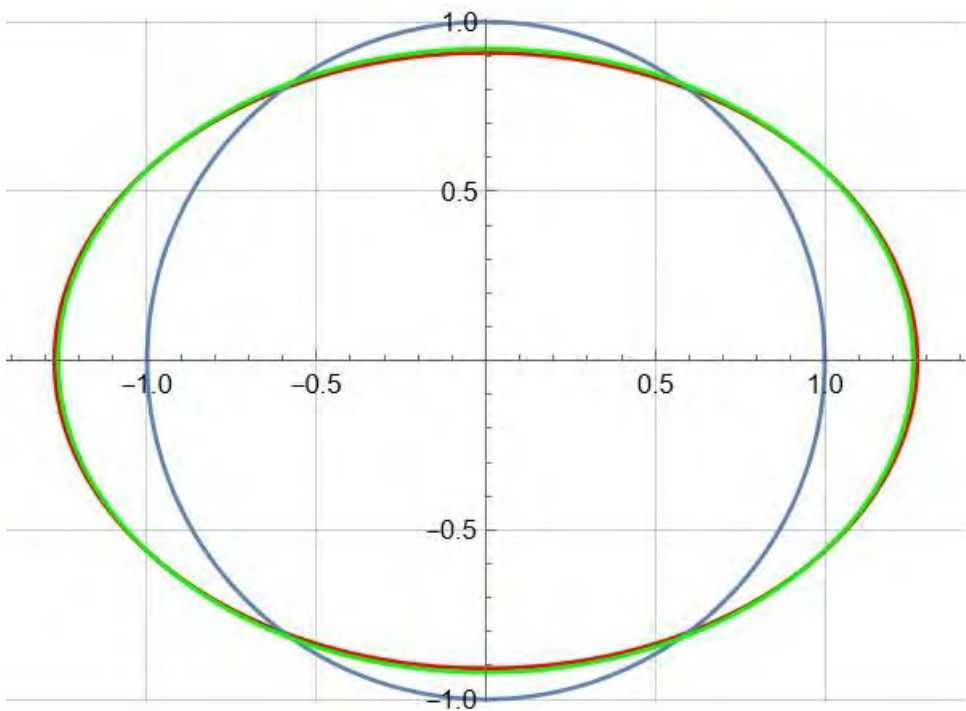
Σχήμα 4.1: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=1$.



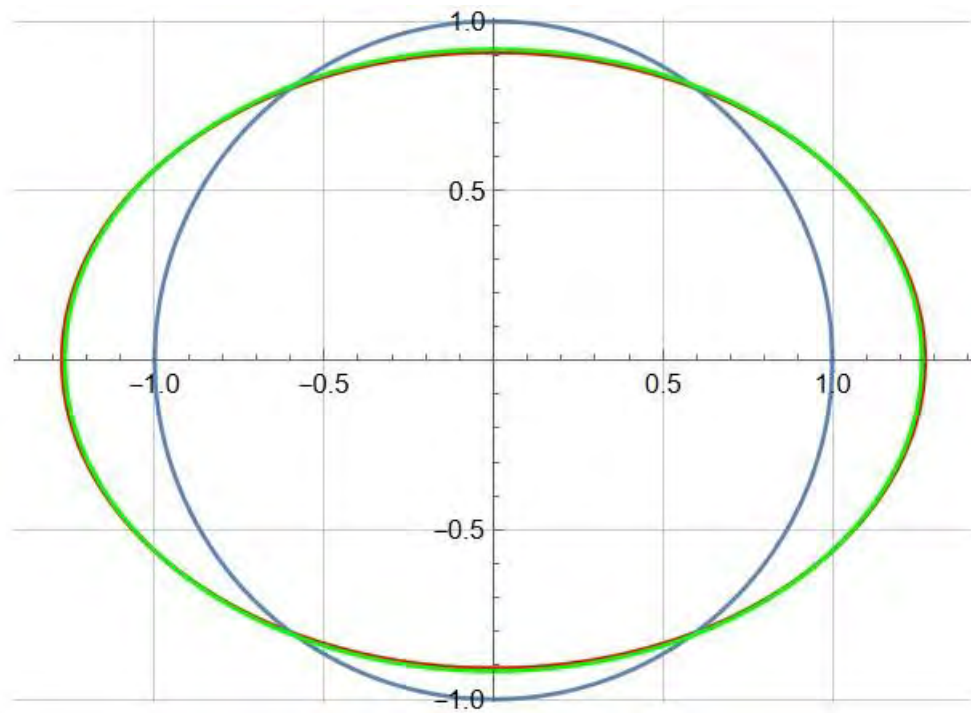
Σχήμα 4.2: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=2$.



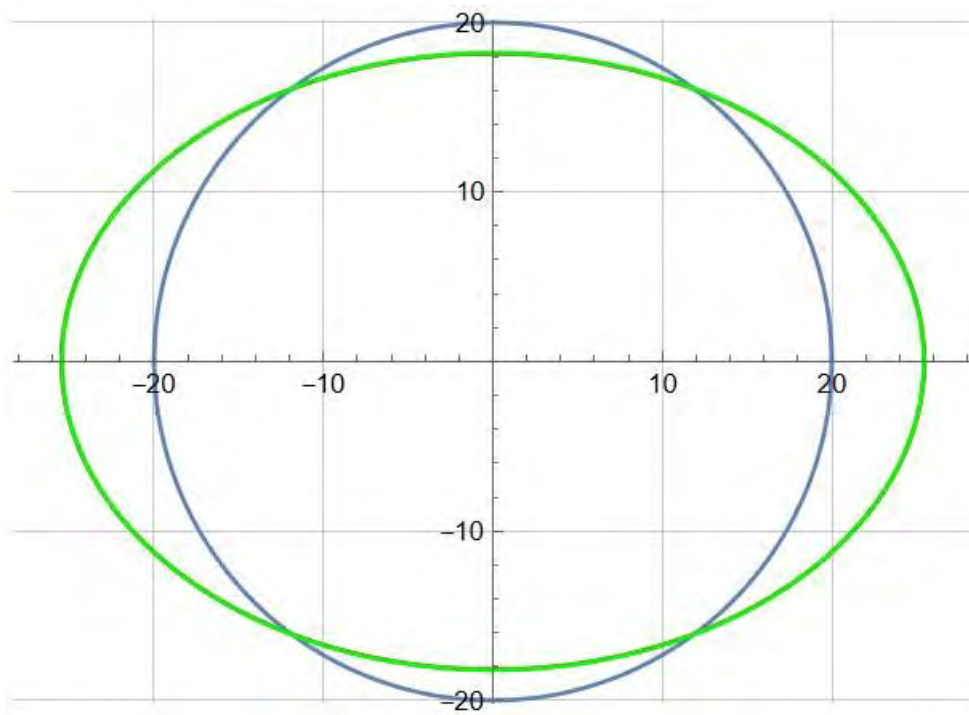
Σχήμα 4.3: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=4$.



Σχήμα 4.4: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=8$.



Σχήμα 4.5: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=10$.



Σχήμα 4.6: Σύγκριση παραμορφωμένης κατάστασης για $\alpha/l=20$.

Επιπρόσθετα, αν παρατηρήσουμε τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσης που προκύπτει από την θεωρία τάσεων ζεύγους όπως φαίνεται στην Εξ.(4.1.2) βλέπουμε πως εξαρτάται τόσο από τον λόγο Poisson (ν) όσο και από τον λόγο a/l , σε αντίθεση με την κλασική θεωρία ελαστικότητας όπου ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης είναι σταθερός και ίσος με 3 στην περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού. Αν θεωρήσουμε ότι $l=0$ δηλαδή αμελήσουμε την ύπαρξη των τάσεων ζεύγους τότε ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης προκύπτει ίσος με αυτόν στην θεωρία κλασικής ελαστικότητας. Σε κάθε περίπτωση, στον Πίνακα 1 αναπαρίσταται η εξάρτηση του Σ.Σ.Τ με τον λόγο a/l για τις οριακές συνθήκες $\nu=0$ και $\nu=0,5$.

$$K_t = \frac{3+F}{1+F} \quad (4.1.2)$$

Πίνακας 4.1: Εξάρτηση Σ.Σ.Τ με τον λόγο a/l και τον λόγο Poisson.

$$K_t = K_t(\nu, a/l), \quad 0 < \nu < 0.5$$

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| • $K_t = K_t(0, 1) = 1,88$ | • $K_t = K_t(0.5, 1) = 2,23$ |
| • $K_t = K_t(0, 2) = 2,169$ | • $K_t = K_t(0.5, 2) = 2,48$ |
| • $K_t = K_t(0, 5) = 2,65$ | • $K_t = K_t(0.5, 5) = 2,81$ |
| • $K_t = K_t(0, 10) = 2,87$ | • $K_t = K_t(0.5, 10) = 2,93$ |
| • $K_t = K_t(0, 40) = 2,99$ | • $K_t = K_t(0.5, 40) = 2,99$ |

4.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΧΩΡΟΥ

Από τα διαγράμματα του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης στο Σχήμα 3.17 και Σχήμα 3.18 παρατηρούμε ότι όλα τα αποτελέσματα πλησιάζουν συνεχώς τις τιμές που υπολογίζονται από κλασική θεωρία ελαστικότητας καθώς I_1, I_2 τείνουν στο μηδέν. Το γεγονός ότι η μείωση αυτή είναι επιτυγχάνεται επίσης αφήνοντας $I_2 = 0$ μόνο, ανεξάρτητα από την τιμή του I_1 αποτελεί μια ιδιαιτερότητα του παρόντος προβλήματος, το οποίο προκύπτει εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν προκαλείται περιστροφή στην διεπιφάνεια των δύο υλικών στην κλασική θεωρίας ελαστικότητας.

Επιπλέον, στην ειδική περίπτωση όπου $g=1$ δηλαδή $G_1=G_2$ και $\nu=1$ δηλαδή $\nu_1=\nu_2$, δεν υπάρχει διαταραχή του εντατικού πεδίου οπότε ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης παραμένει σταθερός και ίσος με την μονάδα. Σε κάθε περίπτωση, συμπεραίνουμε πως αν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού σε μικροσκοπικό επίπεδο τότε από την ανάλυση προκύπτουν ευμενέστερα αποτελέσματα για τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσης.

Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Αποστόλου, Ν. (2017), Συγκέντρωση Τάσεων σε Μηχανολογικές Κατασκευές.

Αραβάνης, Δ. (2017), Διείσδυση κυλίνδρου σε ελαστικό ημιχώρο στα πλαίσια της μικροπολικής θεωρίας ελαστικότητας.

Βουθούνης, Π. (2019), Μηχανική παραμορφώσιμου στερεού, Ανδρομάχη Βουθούνη, Αθήνα.

Γουργιώτης, Π. (2005), Μέθοδος Ολοκληρωτικών Εξισώσεων για Προβλήματα Ρωγμών της Θεωρίας Ελαστικότητας Τάσεων Ζεύγους.

Πέτρου, Ζ. (2011), Προβλήματα Συγκέντρωσης Τάσεων σε Υλικά με Απόκριση Τύπου Βαθμίδας Ελαστικότητας.

Bear, J. (1972). Dynamics of fluids in porous media, New York.

Beer, P. F. et al (2012), Mechanics of Materials (6th ed.), McGraw Hill, New York.

Boresi, A.P., Schmidt, R.J. (2002), Advanced Mechanics of Materials (6th ed.), Wiley

Burland, J. B., Burbidge, M. J. (2009), Soil Structure Interaction (2nd ed.), Spon Press.

Hadjesfandiari, A.R., Dargush, G.F. (2011), Couple stress theory for solids, International Journal of Solids and Structures

Hadjesfandiari, A.R., Dargush, G.F. (2016), Couple stress theories: Theoretical underpinnings and practical aspects from a new energy perspective, New York.

Murray, W. M. (1962), Influence of Couple Stress in Stress Concentrations.

Narasimhan, T. N., Laxminarayan, H. (1993), Introduction to finite element analysis and design, New York.

- Rana, A.K. et al (2017), Stress field in an isotropic elastic solid containing a circular hard or soft inclusion under uniaxial tensile stress, 2nd International Conference on Emerging Materials: Characterization and Application.
- Sadd, M.H., Elasticity Theory, Applications and Numerics.
- Shames, I.H., Pitarresi, J.M. (1999), Introduction to Solid Mechanics (3rd ed.), Pearson
- Taflove, A., Hagness, S. C. (2005), Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method (3rd ed.), Boston.
- Timoshenko, S.P., Gere, J. M. (2012), Theory of Elastic Stability (2nd ed.), Dover Publications.
- Weitsman, Y. (1965), Couple-Stress Effects on Stress Concentration Around a Cylindrical Inclusion in a Field of Uniaxial Tension.
- Young, W.C., et al (2011), Roark's Formulas for Stress and Strain, McGraw Hill.

Παράρτημα Α

Στο πρώτο μέρους του παραρτήματος Α παρουσιάζεται αναλυτικά ο κώδικας στο περιβάλλον του λογισμικού προγράμματος Wolfram Mathematica για το πρώτο πρόβλημα τόσο για την μέθοδο της κλασικής ελαστικότητας όσο και για την μέθοδο τάσεων ζεύγους. Στην συνέχεια, παρουσιάζεται ο κώδικας του δεύτερου προβλήματος.

The screenshot shows the Wolfram Mathematica interface with the following code:

```

Airy Function In Polar Coordinates:

In[ ]:=

$$\phi = a1 \log[r] + a2 r^2 + (a21 r^2 + a23 r^{-2} + a24) \cos[2 \theta];$$


$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} D[\phi, r] + \frac{1}{r^2} D[D[\phi, \theta], \theta] // FullSimplify;$$


$$\sigma_{\theta\theta} = D[D[\phi, r], r] // FullSimplify;$$


$$\tau_{r\theta} = -D\left[\frac{1}{r} D[\phi, \theta], r\right] // FullSimplify;$$


Boundary Conditions:

In[ ]:=
BC1 = Collect[ $\sigma_{rr}$ , Cos[2  $\theta$ ]][[1]] /. r -> a;
BC2 = Collect[ $\sigma_{rr}$ , Cos[2  $\theta$ ]][[2]] /. r -> a;
BC3 =  $\tau_{r\theta}$  /. r -> a;
BC4 = Collect[Limit[ $\sigma_{rr}$ , r -> Infinity] -  $\frac{T}{2} (1 + \cos[2 \theta])$ , Cos[2  $\theta$ ]][[1 ;; 2]];
BC5 = Collect[Limit[ $\tau_{r\theta}$ , r -> Infinity] +  $\frac{T}{2} \sin[2 \theta]$ , Sin[2  $\theta$ ]];
sys = Solve[{BC1 == 0, BC2 == 0, BC3 == 0, BC4 == 0, BC5 == 0}, {a1, a2, a21, a23, a24}];

```

Εισαγωγή τασικής συνάρτησης Airy, υπολογισμός τάσεων, συνοριακών συνθηκών και επίλυση συστήματος.

```

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes View Help
[Icons] [Text] [B] [I] [U] [Color] [Font] [Equation] [Solve] [Plot] [Help]

sys = Solve[{BC1 == 0, BC2 == 0, BC3 == 0, BC4 == 0, BC5 == 0}, {a1, a2, a21, a23, a24}];
(*Μια εξίσωση ανά συνιστώσα*)

In[ ]:=
orr2 = orr / T /. sys /. r -> R a // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)
o002 = o00 / T /. sys /. r -> R a // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)
tr02 = tr0 / T /. sys /. r -> R a // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)

orr1 = orr /. sys // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)
o001 = o00 /. sys // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)
tr01 = tr0 /. sys // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)

Strains:

In[ ]:=
e_rr = (1 + v / Ey) ((1 - v) orr1 - v o001) // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)

e_00 = (1 + v / Ey) (-v orr1 + (1 - v) o001) // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)

e_r0 = (1 + v / Ey) tr01 // FullSimplify;
(*Αλγεβρ. απλοποίηση*)

```

Αντικατάσταση σταθερών στις εξισώσεις των τάσεων και υπολογισμός παραμορφώσεων μέσω των καταστατικών εξισώσεων.

```
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
[Icons] [Insert Cell...] [Grid On/Off] [Zoom In/Out] [Undo/Redo] [Find] [Help]

in[] := (* u_r = Integrate[e_rr, r] *)

u_r2 = Integrate[e_rr, r] // FullSimplify;
(*όρισμα ολοκλήρωσης*)      (*πληθρες απλοποιες*)

u_r = u_r2 + f[θ];

in[] := (* u_θ = Integrate[r * e_θθ - u_r] *)

u_θ1 = Integrate[r * e_θθ, θ] // FullSimplify;
(*όρισμα ολοκλήρωσης*)      (*πληθρες απλοποιες*)

u_θ2 = Integrate[(1/r^2) * T * (1+v) * (r^2 * (a^2 + r^2 * (1-2*v)) + (-a^4 + r^4 - 4*a^2*r^2*(-1+v)) * Cos[2*θ]), θ] // FullSimplify;
(*όρισμα ολοκλήρωσης*)      (*συντημηματα*)      (*πληθρες απλοποιες*)

u_θ3 = Integrate[f[θ], θ];
(*όρισμα ολοκλήρωσης*)

u_θ4 = Plus[u_θ2, u_θ3] /. ∫ f[θ] dθ → F[θ];
(*σβροσημα*)

u_θ5 = Subtract[u_θ1, u_θ4] // FullSimplify;
(*αφαίρεση*)      (*πληθρες απλοποιες*)

u_θ = u_θ5 + g[r] // FullSimplify;
(*πληθρες απλοποιες*)

Subtract[e_rs, 1/2 * (1/r * D[u_r, θ] + D[u_θ, r] - u_θ/r)] /. f'[θ] → F''[θ] // FullSimplify
(*αφαίρεση*)      (*μερικη παρ-*)      (*μερικη παραγωγις*)      (*πληθρες απλοποιες*)
```

Υπολογισμός μετατοπίσεων.

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

Subtitle

Differential Equations:

```

In[ ]:= DSolve[F''[θ] + F[θ] == C, F[θ], θ] /. {C[1] → A, C[2] → B};
(*λυση διαφορικής εξίσωσης (παρατεταμένη μ... (προς πλά... (προς τεταμένη*)
DSolve[g[r] - r g'[r] == C, g[r], r] /. {C[1] → D};
(*λυση διαφορικής εξίσωσης (παρατεταμένη μ... (προς π... (μέρική παράγωγο*)

```

Stress Concentration Factor (Kt):

```

In[ ]:= 0.61 /. {r → a, θ →  $\frac{\pi}{2}}$  // FullSimplify;
(*λύση απόδοσης*)
Kt =  $\frac{3 T}{T}$ ;

```

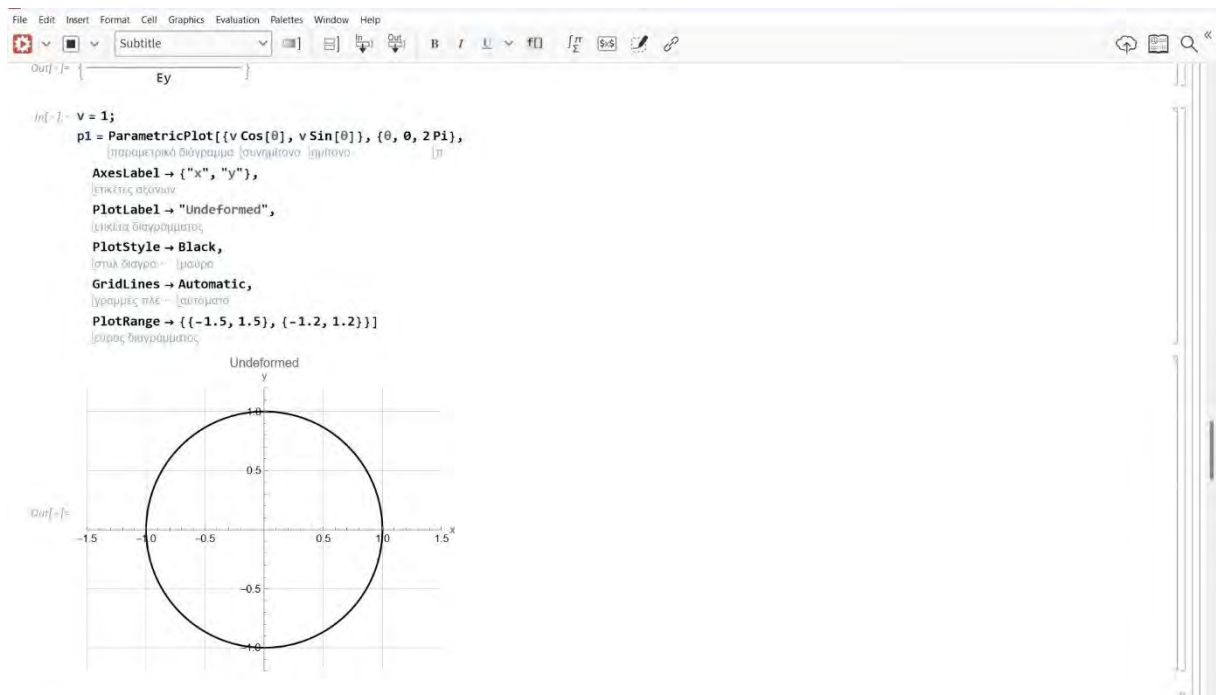
Plot Displacement Field:

```

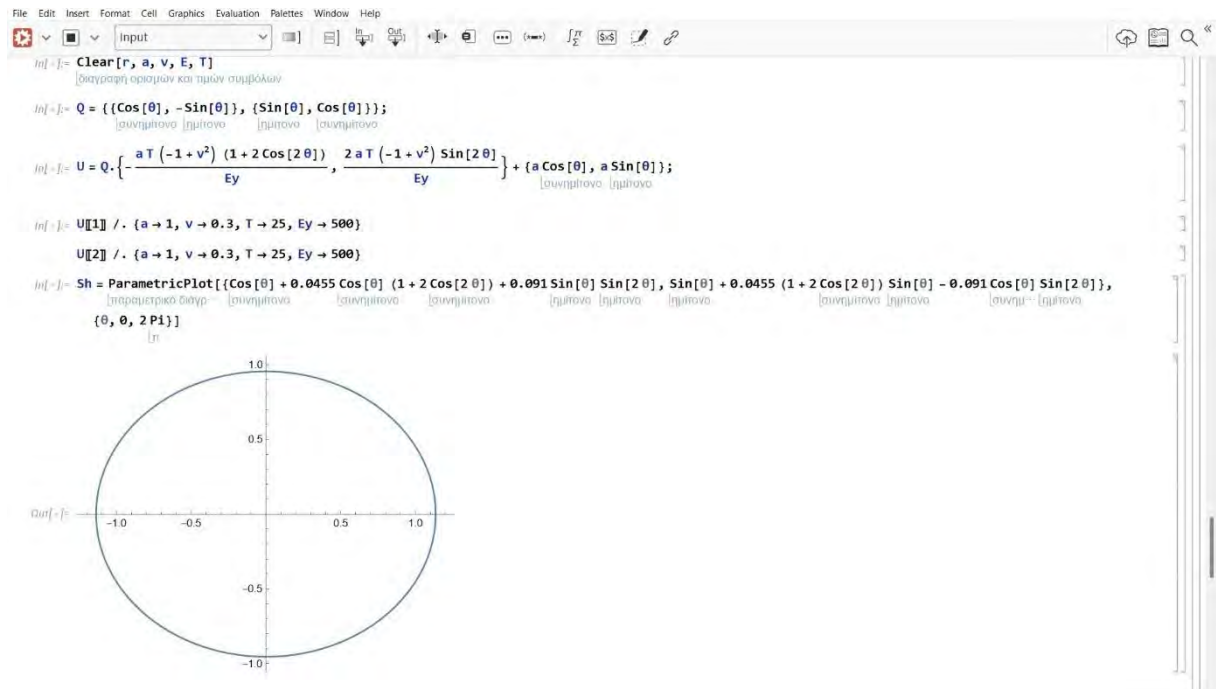
In[ ]:= ur_tot = ur /. {f[θ] → θ, r → a} // FullSimplify
(*πλήρης απόδοση*)
ue_tot = ue /. {f[θ] → θ, g[r] → θ, r → a} // FullSimplify
(*πλήρης απόδοση*)
ur_tot2 = ur_tot + v Cos[θ];
(*συνήμιτονο*)
ue_tot2 = ue_tot + v Sin[θ];
(*ημίτονο*)
ur_d = ur_tot2 /. {a → 1, v → 0.3, T → 25, Ey → 500} // FullSimplify;
(*πλήρης απόδοση*)
ue_d = ue_tot2 /. {a → 1, v → 0.3, T → 25, Ey → 500} // FullSimplify;

```

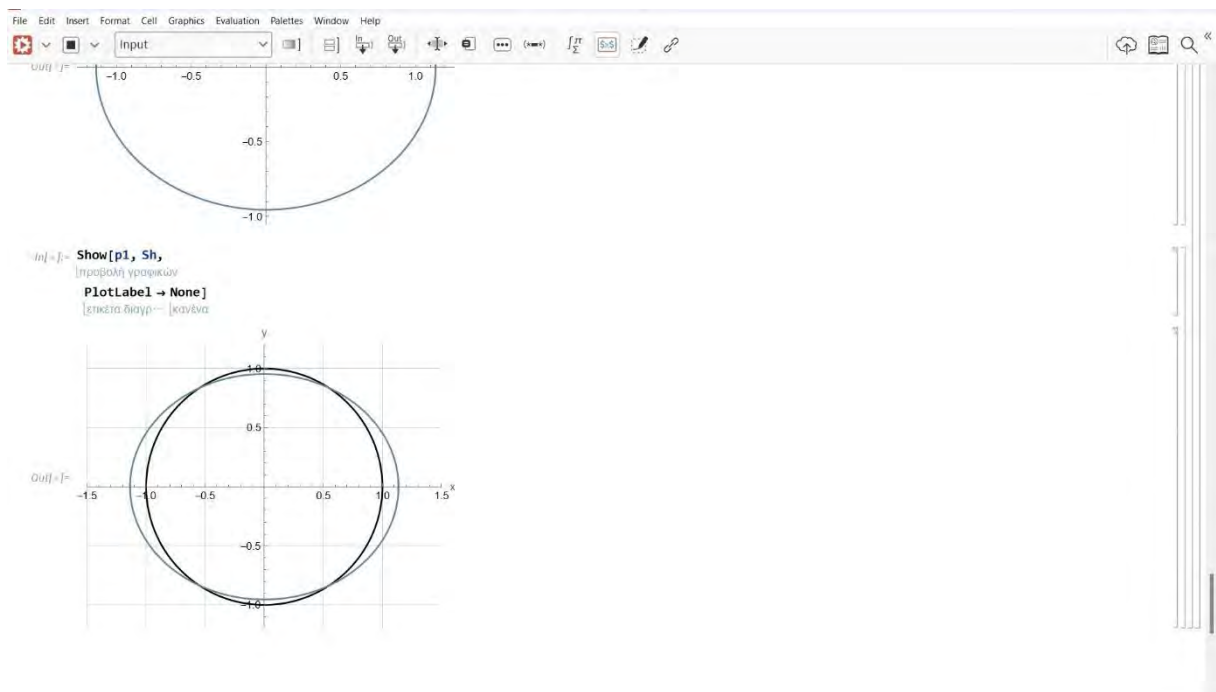
Επίλυση διαφορικής εξίσωσης, υπολογισμός Σ.Σ.Τ και υπολογισμός διαγράμματος παραμορφωμένης κατάστασης.



Σχεδίαση διαγράμματος απαραμόρφωτης κατάστασης.



Υπολογισμός παραμορφωμένης θέσης και σχεδίαση διαγράμματος παραμορφωμένης κατάστασης.



Σχεδίαση συγκριτικού διαγράμματος παραμορφωμένης-απαραμόρφωτης κατάστασης.

Stress Functions:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{T}{4} r^2 (1 - \cos[2\theta]) + AU \log[r] + \left(\frac{BU}{r^2} + CU \right) \cos[2\theta]; \\ \Psi &= \left(\frac{DU}{r^2} + EU \left(\frac{21}{r} \text{BesselK}\left[1, \frac{r}{a}\right] + \text{BesselK}\left[0, \frac{r}{a}\right] \right) \right) \sin[2\theta]; \\ \sigma_r &= \frac{1}{r} D[\Theta, r] + \frac{1}{r^2} D[D[\Theta, \theta], \theta] - \frac{1}{r} D[D[\Psi, \theta], r] + \frac{1}{r^2} D[\Psi, \theta] // \text{FullSimplify}; \\ \sigma_\theta &= D[D[\Theta, r], r] + \frac{1}{r} D[D[\Psi, \theta], r] - \frac{1}{r^2} D[\Psi, \theta] // \text{FullSimplify}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} D[D[\Theta, \theta], r] + \frac{1}{r^2} D[\Theta, \theta] - \frac{1}{r} D[\Psi, r] - \frac{1}{r^2} D[D[\Psi, \theta], \theta] // \text{FullSimplify}; \\ \tau_{\theta r} &= -\frac{1}{r} D[D[\Theta, \theta], r] + \frac{1}{r^2} D[\Theta, \theta] + D[D[\Psi, r], r] // \text{FullSimplify}; \\ \mu_r &= D[\Psi, r] // \text{FullSimplify}; \\ \mu_\theta &= \frac{1}{r} D[\Psi, \theta] // \text{FullSimplify}; \end{aligned}$$

Εισαγωγή τασικών συναρτήσεων, υπολογισμός τάσεων και τάσεων ζεύγους.

Boundary Conditions:

$$\begin{aligned} \text{Bc1} &= \text{Collect}[\sigma_r, \cos[2\theta]] // \text{FullSimplify}; \\ \text{Bc2} &= \text{Collect}[\sigma_\theta, \cos[2\theta]] // \text{FullSimplify}; \\ \text{Bc3} &= \tau_{r\theta} // \text{FullSimplify}; \\ \text{Bc4} &= \mu_r // \text{FullSimplify}; \\ \text{Bc5} &= \text{Limit}[\sigma_r, r \rightarrow \text{Infinity}, \text{Assumptions} \rightarrow 1 > 0] - \frac{T}{2} (1 + \cos[2\theta]) // \text{FullSimplify}; \\ \text{Bc6} &= \text{Limit}[\tau_{r\theta}, r \rightarrow \text{Infinity}, \text{Assumptions} \rightarrow 1 > 0] + \frac{T}{2} (\sin[2\theta]) // \text{FullSimplify}; \\ \text{Sys} &= \text{Solve}[\{\text{Bc1} == 0, \text{Bc2} == 0, \text{Bc3} == 0, \text{Bc4} == 0, \text{Bc5} == 0\}, \{AU, BU, CU, DU, EU\}] // \text{FullSimplify}; \\ \text{DU} &= 8 (1 - \nu) \frac{a^2 T}{2 + 2 F}; \end{aligned}$$

$$\text{Out}[9] = \left\{ \left\{ AU \rightarrow -\frac{a^2 T}{2}, BU \rightarrow \frac{a^4 (-1 + F) T}{4 (1 + F)}, CU \rightarrow \frac{a^2 T}{2 + 2 F}, EU \rightarrow -\frac{a F T}{(1 + F) \text{BesselK}\left[1, \frac{a}{1}\right]} \right\} \right\}$$

Τοποθέτηση συνοριακών συνθηκών και επίλυση συστήματος.

Strains:

```

In[17]:= err =  $\frac{1+v}{E_y} ((1-v) \sigma r - v \sigma \theta) /. Sys // FullSimplify;$ 
           (σ/Εy) (σr (1-ν) - ν σθ)
           (σ/Εy) (σr (1-ν) - ν σθ)
           (σ/Εy) (σr (1-ν) - ν σθ)

eθθ =  $\frac{1+v}{E_y} (-v \sigma r + (1-v) \sigma \theta) /. Sys // FullSimplify;$ 
           (σ/Εy) (-ν σr + (1-ν) σθ)
           (σ/Εy) (-ν σr + (1-ν) σθ)
           (σ/Εy) (-ν σr + (1-ν) σθ)

erθ =  $\frac{1+v}{2 E_y} (\tau r \theta + \tau \theta r) /. Sys // FullSimplify;$ 
           (τ/Εy) (r θ + θ r)
           (τ/Εy) (r θ + θ r)
           (τ/Εy) (r θ + θ r)

```

Displacements:

```

In[20]:= ur[r_] = Integrate[err[[1]], r] // Simplify;
           (αριθμητικό ολοκλήρωμα) (σ/Εy) (σr (1-ν) - ν σθ)
           (αριθμητικό ολοκλήρωμα) (σ/Εy) (σr (1-ν) - ν σθ)
           (αριθμητικό ολοκλήρωμα) (σ/Εy) (σr (1-ν) - ν σθ)

uθ[r_] = Integrate[r eθθ[[1]], θ] - Integrate[ur[r], θ] // Simplify;
           (αριθμητικό ολοκλήρωμα) (σ/Εy) (-ν σr + (1-ν) σθ)
           (αριθμητικό ολοκλήρωμα) (σ/Εy) (-ν σr + (1-ν) σθ)
           (αριθμητικό ολοκλήρωμα) (σ/Εy) (-ν σr + (1-ν) σθ)

In[22]:= (*check*)
N[
  (αριθμητική τιμή)
  
$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} D[ur[r], \theta] + D[u\theta[r], r] - \frac{u\theta[r]}{r} \right) /. F \rightarrow - \frac{8 l^2 (-1+v) BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]}{2 a l BesselK\left[0, \frac{a}{l}\right] + a^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right] + 4 l^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]} /. Ey \rightarrow 1 /. a \rightarrow 2\theta /. l \rightarrow 2 /. v \rightarrow 3/10 /. T \rightarrow 1 /. \theta \rightarrow \pi/11 /. r \rightarrow 4\theta, 4\theta // Simplify$$

  (αριθμητική τιμή)
  
$$N\left[er\theta /. F \rightarrow - \frac{8 l^2 (-1+v) BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]}{2 a l BesselK\left[0, \frac{a}{l}\right] + a^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right] + 4 l^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]} /. Ey \rightarrow 1 /. a \rightarrow 2\theta /. l \rightarrow 2 /. v \rightarrow 3/10 /. T \rightarrow 1 /. \theta \rightarrow \pi/11 /. r \rightarrow 4\theta, 4\theta // Simplify$$

  (αριθμητική τιμή)
  Simplify
  (αριθμητική τιμή)

```

Υπολογισμός παραμορφώσεων και μετατοπίσεων.

```

In[22]:= (*check*)
N[
  (αριθμητική τιμή)
  
$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} D[ur[r], \theta] + D[u\theta[r], r] - \frac{u\theta[r]}{r} \right) /. F \rightarrow - \frac{8 l^2 (-1+v) BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]}{2 a l BesselK\left[0, \frac{a}{l}\right] + a^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right] + 4 l^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]} /. Ey \rightarrow 1 /. a \rightarrow 2\theta /. l \rightarrow 2 /. v \rightarrow 3/10 /. T \rightarrow 1 /. \theta \rightarrow \pi/11 /. r \rightarrow 4\theta, 4\theta // Simplify$$

  (αριθμητική τιμή)
  
$$N\left[er\theta /. F \rightarrow - \frac{8 l^2 (-1+v) BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]}{2 a l BesselK\left[0, \frac{a}{l}\right] + a^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right] + 4 l^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]} /. Ey \rightarrow 1 /. a \rightarrow 2\theta /. l \rightarrow 2 /. v \rightarrow 3/10 /. T \rightarrow 1 /. \theta \rightarrow \pi/11 /. r \rightarrow 4\theta, 4\theta // Simplify$$

  (αριθμητική τιμή)
  Simplify
  (αριθμητική τιμή)

```

```

In[39]:= (*parameters*)
a = 1;
Ey = 10;
v = 0.3;
T = 1;
l = 1;

F = -  $\frac{8 l^2 (-1+v) BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]}{2 a l BesselK\left[0, \frac{a}{l}\right] + a^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right] + 4 l^2 BesselK\left[1, \frac{a}{l}\right]}$ ;

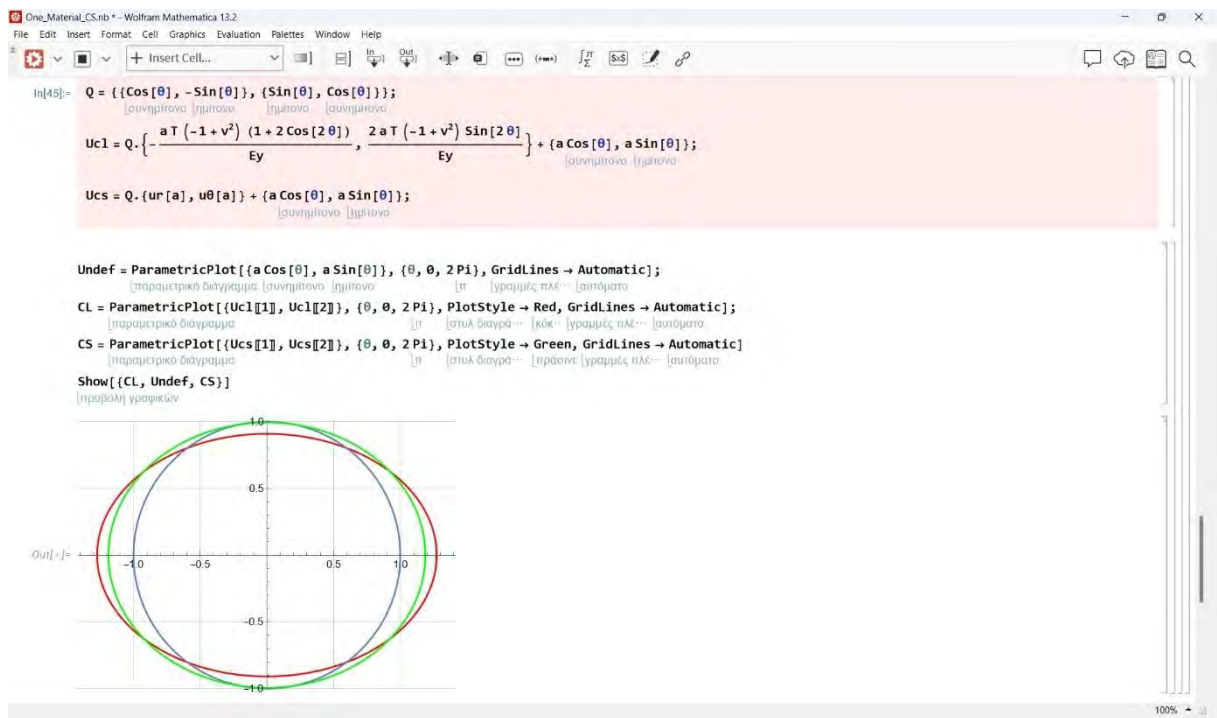
```

```

In[45]:= Q = {{Cos[θ], -Sin[θ]}, {Sin[θ], Cos[θ]}};
           (συννημιτόνο) (ημίτονο) (συννημιτόνο) (ημίτονο)
           (συννημιτόνο) (ημίτονο) (συννημιτόνο) (ημίτονο)

```

Εισαγωγή τιμών στις παραμέτρους.



Σχεδίαση ενιαίου διαγράμματος απαραμόρφωτης κατάστασης και παραμορφωμένης λόγω κλασική θεωρίας και θεωρίας τάσεων ζεύγους.


```

In[ ]:=
(*θ<π<3π*)
φ1 = AI r^2 + BI r^2 Cos[2 θ] + CI a^2 r^4 Cos[2 θ];
ψ1 = 24 (1 - ν1) CI λ1^-2 r^2 Sin[2 θ] + DI a^2 BesselI[2, r/λ1] Sin[2 θ] /. {11 -> 1/λ1};

In[ ]:=
σr1 = 1/r D[φ1, r] + 1/r^2 D[D[φ1, θ], θ] - 1/r D[D[ψ1, θ], r] + 1/r^2 D[ψ1, θ] // FullSimplify;
σθ1 = D[D[φ1, r], r] + 1/r D[D[φ1, θ], r] - 1/r^2 D[ψ1, θ] // FullSimplify;
τrθ1 = -1/r D[D[φ1, θ], r] + 1/r^2 D[φ1, θ] - 1/r D[ψ1, r] - 1/r^2 D[D[ψ1, θ], θ] // FullSimplify;
τθr1 = -1/r D[D[φ1, θ], r] + 1/r^2 D[φ1, θ] + D[D[ψ1, r], r] // FullSimplify;
μr1 = D[ψ1, r] // FullSimplify;
μθ1 = 1/r D[ψ1, θ] // FullSimplify;

In[ ]:=
er1 = (1 + ν1) / (2 G1 (1 + ν1)) ((1 - ν1) σr1 - ν1 σθ1) // FullSimplify;
eθ1 = (1 + ν1) / (2 G1 (1 + ν1)) ((1 - ν1) σθ1 - ν1 σr1) // FullSimplify;

```

Υπολογισμός τασικών συναρτήσεων, εντατικών μεγεθών και παραμορφώσεων συναρτήσει των σταθερών για το υλικό του εγκλείσματος.

```

In[ ]:=
(*π<θ<Infinity*)
φ2 = 7/4 r^2 (1 - Cos[2 θ]) + EI a^2 Log[r] + FI a^4 r^-2 Cos[2 θ] + MI a^2 Cos[2 θ];
ψ2 = 8 (1 - ν2) MI λ2^-2 a^4 r^-2 Sin[2 θ] + HI a^2 BesselK[2, r/λ2] Sin[2 θ] /. {12 -> 1/λ2};

In[ ]:=
σr2 = 1/r D[φ2, r] + 1/r^2 D[D[φ2, θ], θ] - 1/r D[D[ψ2, θ], r] + 1/r^2 D[ψ2, θ] // FullSimplify;
σθ2 = D[D[φ2, r], r] + 1/r D[D[φ2, θ], r] - 1/r^2 D[ψ2, θ] // FullSimplify;
τrθ2 = -1/r D[D[φ2, θ], r] + 1/r^2 D[φ2, θ] - 1/r D[ψ2, r] - 1/r^2 D[D[ψ2, θ], θ] // FullSimplify;
τθr2 = -1/r D[D[φ2, θ], r] + 1/r^2 D[φ2, θ] + D[D[ψ2, r], r] // FullSimplify;

```

Υπολογισμός μετακινήσεων για το υλικό 1 καθώς και τασικών συναρτήσεων, εντατικών μεγεθών συναρτήσει των σταθερών για το υλικό 2.

```

Two_Materials_CS_General_Changed.nb - Wolfram Mathematica 13.2
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

(*Strain Calculation*)

μr2 = D[ψ2, r] // FullSimplify;
μθ2 = 1/r D[ψ2, θ] // FullSimplify;

In[ ]:= (*Strain Calculation*)

er2 = (1 + ν2) / (2 G2 (1 + ν2)) ((1 - ν2) σr2 - ν2 σθ2) /. {λ2 -> 1/12} // FullSimplify;
eθ2 = (1 + ν2) / (2 G2 (1 + ν2)) ((1 - ν2) σθ2 - ν2 σr2) // FullSimplify;
erθ2 = (1 + ν2) / (4 G2 (1 + ν2)) (τrθ2 + τθr2) // FullSimplify;

In[ ]:= (*Displacements Calculation*)

ur2 = Integrate[er2, r] // Simplify;
uθ2 = Integrate[r eθ2, θ] - Integrate[ur2, θ] // Simplify;
w2 = 1/2 (D[uθ2, r] - 1/r D[ur2, θ] + uθ2/r) // Simplify;

(*Boundary Conditions*)
T = 1;
a = 1;
G1 = G2 * g;

```

Υπολογισμός παραμορφώσεων και μετατοπίσεων για το υλικό 2.

```

Two_Materials_CS_General_Changed.nb - Wolfram Mathematica 13.2
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

G1 = G2 * g;
l1 = 1/λ1;
l2 = 1/λ2;
Bc1 = σr1 - σr2 /. {r -> a, θ -> π/4} // FullSimplify;
Bc2 = D[σr1 - σr2, Cos[2 θ]] /. {r -> a} // FullSimplify;
Limit[Bc2, λ2 -> Infinity];
Bc3 = (τrθ1 - τrθ2) / Sin[2 θ] /. {r -> a} // FullSimplify;
Limit[Bc3, λ2 -> Infinity];
In[ ]:= Bc41 = (μr1 - μr2) / Sin[2 θ] /. {r -> a} // FullSimplify;
Bc4 = 1/2 (-96 C1 (-1 + ν1) / λ1^2 - 32 M1 (-1 + ν2) / λ2^2 + D1 λ1 (BesselI[1, λ1] + BesselI[1, λ1] - 4/λ1 BesselI[2, λ1]) +
H1 λ2 (BesselK[1, λ2] + 4/λ2 BesselK[2, λ2] + BesselK[1, λ2])) Sin[2 θ] / Sin[2 θ] // FullSimplify;
Limit[Bc4, λ2 -> Infinity];
36 C1

```

Ορισμός παραμέτρων και διατύπωση συνοριακών συνθηκών προβλήματος.

```

Limit[Bc4, λ2 → Infinity];
Out[-] =  $\frac{36 CI}{\lambda_1^2} + DI \lambda_1 \text{BesselI}[1, \lambda_1] - 2 DI \text{BesselI}[2, \lambda_1]$ 

Bc5 = (ur1 - ur2) + 2 G1 /. {r → a, θ →  $\frac{\pi}{4}$ } // Simplify;
Out[-] = 0

Bc6 = D[ur1 - ur2, Cos[2 θ]] + 2 G1 /. r → a // Simplify;
Out[-] = 0

In[-] = MeijerG[{{ $\frac{3}{2}$ }, {}}, {{-1, 1}, { $\frac{1}{2}$ }},  $\frac{22}{2}, \frac{1}{2}$ ] // N
Out[-] = 46.0767

In[-] = MeijerG[{{ $\frac{3}{2}$ }, {}}, {{0, 1}, { $\frac{1}{2}$ }},  $\frac{50}{2}, \frac{1}{2}$ ] // N
Out[-] = 257.254

In[-] = Limit[ $\frac{1}{2} g \left( 1 + 4 FI - \frac{8 MI (-4 + \lambda_2^2) (-1 + v_2)}{\lambda_2^2} \right)$ , λ2 → Infinity]
Out[-] =  $\frac{1}{6} (3 g + 12 FI g + 16 g MI)$ 

```

Διατύπωση συνοριακών συνθηκών προβλήματος.

```

Bc7 = (u01 - u02) + 2 G1 / Sin[2 θ] /. {r → a} // Simplify;
Out[-] = 0

Bc8 = (w1 - w2) / Sin[2 θ] /. {r → a, λ2 →  $\frac{1}{\lambda_2}$ } // Simplify;
Out[-] = 0

In[-] = (*Assumptions*)
In[-] = v1 =  $\frac{1}{4}$ ;
In[-] = v2 =  $\frac{1}{3}$ ;

In[-] = Sys1 = N[Solve[{Bc1 == 0, Bc2 == 0, Bc3 == 0, Bc4 == 0, Bc5 == 0, Bc6 == 0, Bc7 == 0, Bc8 == 0}, {AI, BI, CI, DI, EI, FI, MI, HI}] /. {g →  $\frac{1}{2}$ , r → 1, G2 → 2}, 40];
Out[-] = { }

In[-] = Sys2 = N[Solve[{Bc1 == 0, Bc2 == 0, Bc3 == 0, Bc4 == 0, Bc5 == 0, Bc6 == 0, Bc7 == 0, Bc8 == 0}, {AI, BI, CI, DI, EI, FI, MI, HI}] /. {g → 2, r → 1, G2 → 1}, 40];
Out[-] = { }

In[-] = Sys1[[1, 2]] /. {λ1 → 1, λ2 → 1}
Out[-] = BI → -0.1783977092713825384545557184375932877

In[-] = (*SCF for g<1*)
In[-] = θ01 /. Sys1 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , λ1 → 1, λ2 → 1, r → 1} // N
Out[-] = 0

In[-] = θ02 /. Sys1 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , λ1 → 1, λ2 → 1, r → 1} // N
Out[-] = 0

```

Επίλυση συστήματος για g=1/2 και g=2.

```

In[ ]:= σ01 /. Sys1 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , λ1 → 1, λ2 → 1, r → 1} // N

σ02 /. Sys1 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , λ1 → 1, λ2 → 1, r → 1} // N

Out[ ]:= {0.622081}

Out[ ]:= {1.38638}

In[ ]:= {+SCF for g>1*}

In[ ]:= σ01 /. Sys2 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , λ1 → 1, λ2 → 1, r → 1} // N

σ02 /. Sys2 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , λ1 → 1, λ2 → 1, r → 1} // N

Out[ ]:= {1.345}

Out[ ]:= {0.674505}

In[ ]:= Sys1[[1, 4]] /. {λ1 → 1, λ2 → 2} // N;

In[ ]:= Sys2[[1, 4]] /. {λ1 → 1, λ2 → 2} // N;

(*Stress Concentration Factor 1*)

In[ ]:= GSCF1[λ1_] = σ02 /. Sys1 /. {θ →  $\frac{\pi}{2}$ , r → 1};

```

Αντικατάσταση σταθερών στα εντατικά μεγέθη και υπολογισμός Σ.Σ.Τ.(1).

```

In[ ]:= GSCF1[5] /. λ2 → 42

Out[ ]:= {1.5}

In[ ]:= A1 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 0.1, Joined → True];

In[ ]:= A2 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 0.5, Joined → True];

In[ ]:= A3 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 2}] /. λ2 → 1, Joined → True];

In[ ]:= A4 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 2, Joined → True];

In[ ]:= A5 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 3, Joined → True];

In[ ]:= A6 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 4, Joined → True];

In[ ]:= A10 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 5, Joined → True];

In[ ]:= A7 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 6, Joined → True];

In[ ]:= A11 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 7, Joined → True];

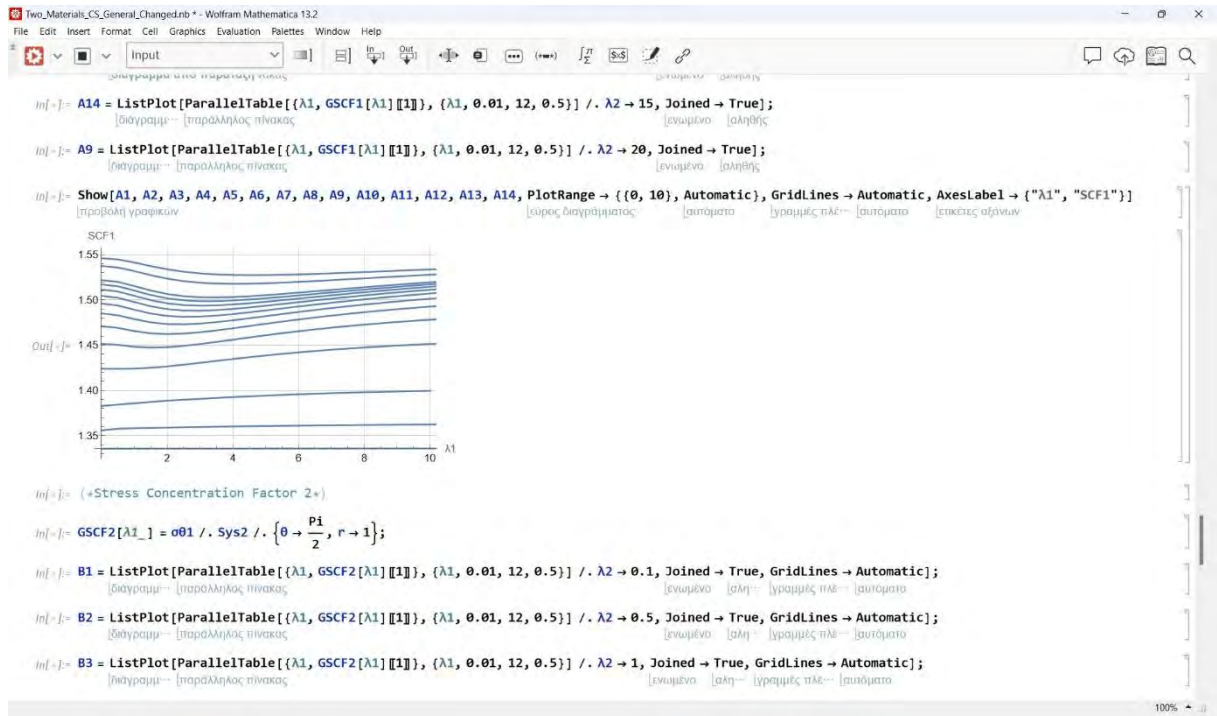
In[ ]:= A12 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 8, Joined → True];

In[ ]:= A13 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 9, Joined → True];

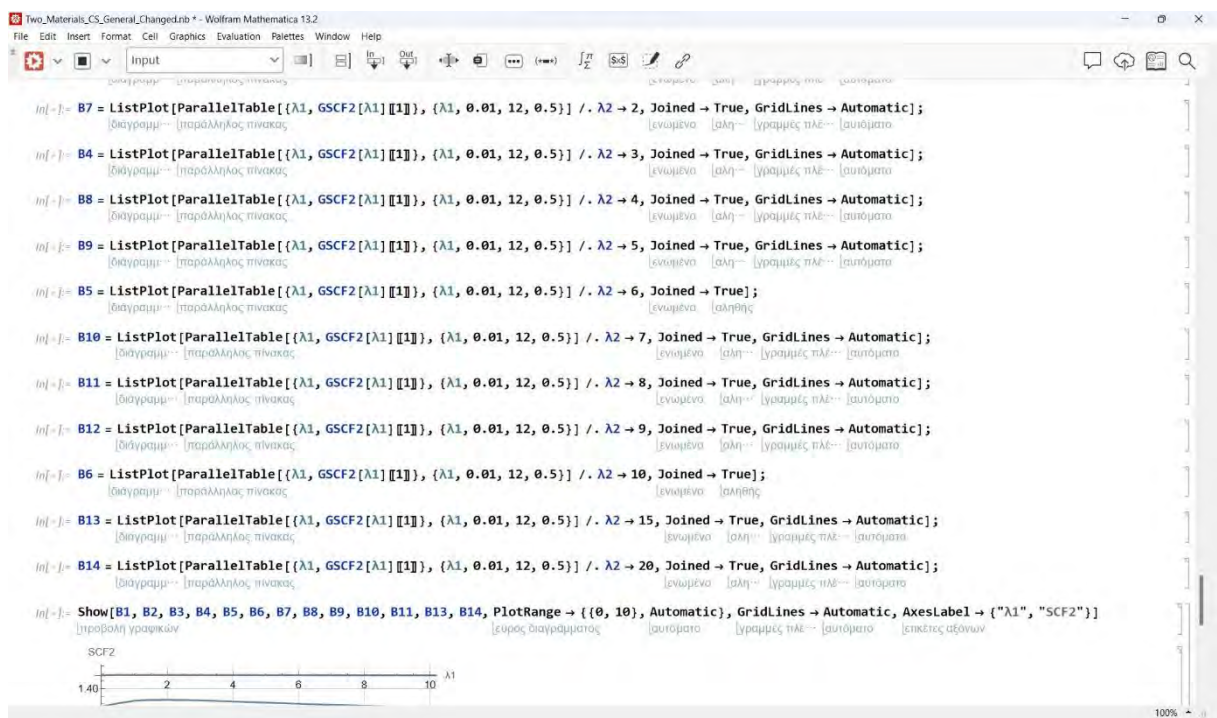
In[ ]:= A8 = ListPlot[ParallelTable[{λ1, GSCF1[λ1][1]}, {λ1, 0.01, 12, 0.5}] /. λ2 → 10, Joined → True];

```

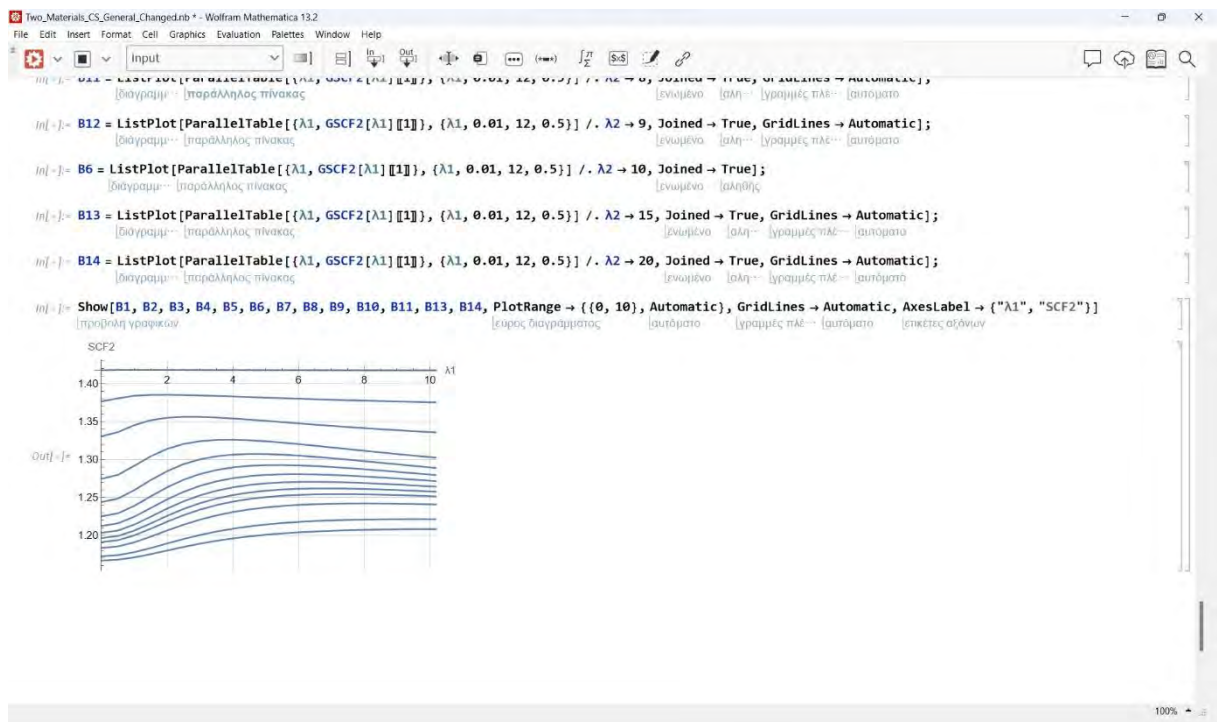
Υπολογισμός μεγεθών διαγράμματος μεταβολής Σ.Σ.Τ.(1) συναρτήσει των λ1, λ2.



Σχεδίαση διαγράμματος μεταβολής Σ.Σ.Τ.(1) και υπολογισμός Σ.Σ.Τ.(2).



Υπολογισμός μεγεθών διαγράμματος μεταβολής Σ.Σ.Τ.(2) συναρτήσει των λ1, λ2.



Σχεδίαση διαγράμματος μεταβολής Σ.Σ.Τ.(2).