

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**



Διπλωματική Εργασία

**Προβλήματα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών
στη Μετάδοση Θερμότητας με Αγωγή**

ΛΥΜΠΑΚΗ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΑ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2023

© 2023 [Λυμπάκη Τριανταφυλλιά](#)

Η έγκριση της παρούσας διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής:

(Επιβλέπων)

Θεοφάνης Γραμμένος

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής:

Ευριπίδης Μυστακίδης

Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής:

Ολυμπία Παναγούλη

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, επιθυμώ να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Θεοφάνη Γραμμένο, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση του συγκεκριμένου θέματος. Επίσης αναγνωρίζω με ευγνωμοσύνη την πολύτιμη βοήθεια, και με αληθινό ενδιαφέρον καθοδήγησή του, κατά τη διάρκεια της εργασίας μου. Ευχαριστώ τις φίλες μου Έλενα, Αναστασία, και Μαρία για την ηθική υποστήριξή τους. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, τον Καθηγητή κ. Ευριπίδη Μυστακίδη και την Αναπλ. Καθηγήτρια κα. Ολυμπία Παναγούλη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Τέλος, ευχαριστώ όλα τα μέλη της οικογένειάς μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, Χρήστο και Κωνσταντίνα Λυμπάκη για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Λυμπάκη Τριανταφυλλιά

Προβλήματα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών στη Μετάδοση Θερμότητας με Αγωγή

Λυμπάκη Τριανταφυλλιά

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2023

Επιβλέπων Καθηγητής: Θεοφάνης Γραμμένος, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετήθηκε η μετάδοση θερμότητας με αγωγή στο καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Γενικά, οι μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας είναι τρεις: αγωγή, συναγωγή, και ακτινοβολία. Η μετάδοση θερμότητας με αγωγή πραγματοποιείται σε στερεά μέσα, σε αντίθεση με τους άλλους δύο οι οποίοι απαιτούν την παρουσία υγρού ή αέριου μέσου. Για τον λόγο αυτόν, οι μηχανικοί και ειδικότερα οι πολιτικοί μηχανικοί επιδεικνύουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την αγωγή, καθώς είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός μετάδοσης θερμότητας στα δομικά υλικά μιας κατασκευής. Αρχικά καταστρώθηκε η εξίσωση μετάδοσης θερμότητας με αγωγή μέσω του νόμου Fourier και της αρχής διατήρησης της ενέργειας για τα τρία συστήματα συντεταγμένων, και για μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη ροή θερμότητας, καθώς επίσης για μόνιμη ή μη μόνιμη ροή. Οι διαφορικές εξισώσεις που προέκυψαν είναι γραμμικές, δεδομένου ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας θεωρήθηκε σταθερός και ανεξάρτητος της θερμοκρασίας και της διεύθυνσης. Εκτός από τη διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα, είναι επίσης απαραίτητες οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές εν προκειμένω αφορούν τη θερμοκρασία ή τη ροή θερμότητας στις επιφάνειες του μέσου, και μπορεί να είναι γραμμικές ή μη γραμμικές. Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην επίλυση μόνο γραμμικών προβλημάτων (με γραμμική διαφορική εξίσωση και γραμμικές συνοριακές συνθήκες) μετάδοσης θερμότητας με αγωγή, σε ισότροπα υλικά. Στη συνέχεια επιλύθηκαν προβλήματα μόνιμης και μη μόνιμης μετάδοσης θερμότητας σε διάφορες γεωμετρίες στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων με εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Σημειώνεται πως η συγκεκριμένη μέθοδος εφαρμόζεται σε ομογενή προβλήματα (δηλαδή προβλήματα αποτελούμενα από ομογενή διαφορική εξίσωση και ομογενείς συνοριακές συνθήκες). Για την επίλυση μη ομογενών προβλημάτων, έγινε χρήση της αρχής της υπέρθεσης, κατά την οποία το πρόβλημα διαιρείται σε απλούστερα ομογενή προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Εκτός από πεπερασμένες γεωμετρίες, μελετήθηκαν και ημι-άπειρα χωρία, στα οποία η μετάδοση θερμότητας

είναι μονοδιάστατη ή διδιάστατη, ανάλογα με τον αριθμό των άπειρων επιφανειών. Τέλος, έγινε σύντομη αναφορά στη μέθοδο της θερμικής αντίστασης, η οποία παρουσιάζει ομοιότητα με τα ηλεκτρικά κυκλώματα και χρησιμοποιείται για την επίλυση μόνιμων προβλημάτων, καθώς και στον συντελεστή σχήματος για πολύπλοκες γεωμετρίες.

Initial and Boundary Value Problems in Heat Transfer by Conduction

Lympaki Triantafyllia

University of Thessaly, Department of Civil Engineering, 2023

Supervisor: Theofanis Grammenos, Associate Professor

ABSTRACT

In this thesis, the heat transfer by conduction was studied in the Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems, using the method of separation of variables. In general, the mechanisms of heat transfer are three: conduction, convection, and radiation. Heat transfer by conduction takes place in solid media, unlike the other two, which require the presence of a liquid or gaseous medium. For this reason, engineers, and particularly civil engineers, show a special interest in conduction, as it is the dominant heat transfer mechanism in the structural materials. Firstly, the conduction heat transfer equation is established through Fourier's law and applying the principle of conservation of energy for the three coordinate systems, for one-dimensional or multi-dimensional heat flow, as well as for steady or unsteady flow. The resulting differential equations are linear, since the thermal conductivity coefficient was assumed to be constant and independent of temperature and direction. In addition to the differential equation governing the problem, the initial and boundary conditions are also necessary. These conditions, in this case, are related to the temperature or heat flow at the surfaces of the medium, and may be linear or non-linear. This thesis focuses on solving only linear problems (with a linear differential equation and linear boundary conditions) of heat transfer by conduction, in isotropic materials. Then, steady-state and transient heat transfer problems are solved in various geometries in the three aforesaid coordinate systems, by applying the method of separation of variables. It is noted that this specific method is applied to homogeneous problems (i.e. problems consisting of a homogeneous differential equation and homogeneous boundary conditions). In order to solve non-homogeneous problems, the application of the superposition principle was used, through which the problem is divided into simpler homogeneous problems that can be solved by the method of separation of variables. In addition to finite geometries, semi-infinite regions were also studied, in which the heat transfer is one-dimensional or two-dimensional, depending on the number of infinite surfaces. Finally, a reference was made to the thermal resistance method, which is similar to electrical circuits and is used to solve steady-state problems, as well as to the shape factor which is used for solving more complex geometries.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	6
1.1	Κίνητρο και υπόβαθρο	6
1.2	Μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας	7
1.3	Μετάδοση Θερμότητας σε Κτίρια	10
1.4	Μετάδοση Πυρκαγιάς σε Κατασκευές	13
Κεφάλαιο 2	Διαφορική Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας με Αγωγή	17
2.1	Γενικές Έννοιες και Νόμος Fourier	17
2.2	Γενική Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας με Αγωγή/Η Εξίσωση Διάχυσης Θερμότητας	24
2.2.1	Εξίσωση Μονοδιάστατης Μετάδοσης Θερμότητας	25
2.2.2	Γενική Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας με Αγωγή	29
2.3	Συνοριακές Συνθήκες.....	34
Κεφάλαιο 3	Μόνιμη Μετάδοση Θερμότητας	42
3.1	Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών	42
3.1.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες.....	43
3.1.2	Κυλινδρικές συντεταγμένες	52
3.1.3	Σφαιρικές Συντεταγμένες	64
3.2	Μη Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος της Υπέρθωσης	72
3.2.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες.....	74
3.2.2	Κυλινδρικές Συντεταγμένες.....	79
3.2.3	Σφαιρικές Συντεταγμένες	82
3.3	Η Μέθοδος της Θερμικής Αντίστασης.....	84
3.3.1	Η Έννοια της Θερμικής Αντίστασης σε Τοίχωμα	85
3.3.2	Θερμική Αντίσταση σε Κύλινδρο και Σφαίρα.....	90
3.4	Μετάδοση θερμότητας σε σύνθετες γεωμετρίες - Παράγοντας S.....	91

Κεφάλαιο 4	Μη Μόνιμη Μετάδοση Θερμότητας	94
4.1	Συστήματα Εντοπισμένης Χωρητικότητας	94
4.2	Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών	97
4.2.1	Καρτεσιανές συντεταγμένες	97
4.2.2	Κυλινδρικές συντεταγμένες	104
4.2.3	Σφαιρικές Συντεταγμένες	114
4.3	Μη Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος της Υπέρθησης	128
4.3.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες.....	128
4.3.2	Κυλινδρικές Συντεταγμένες.....	131
4.3.3	Σφαιρικές Συντεταγμένες.....	137
4.4	Ημι-Άπειρα Χωρία	145
4.4.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες.....	146
4.4.2	Κυλινδρικές Συντεταγμένες.....	159
4.4.3	Σφαιρικές Συντεταγμένες.....	169
	Γενικά Συμπεράσματα	173
	Παράρτημα Α	175
	Προβλήματα Συνοριακών Τιμών και Θεωρία Sturm-Liouville	175
	Παράρτημα Β	179
	Εξίσωση Bessel	179
	Πολυώνυμα Legendre.....	183
	Βιβλιογραφία	186

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.2.1: Μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε αέρια, υγρά και στερεά (Cengel and Ghajar, 2015).	8
Σχήμα 1.2.2: Μετάδοση θερμότητας μεταξύ δύο επιφανειών (Bergman et al., 2011).	8
Σχήμα 1.2.3: Μετάδοση θερμότητας από μία επιφάνεια προς ένα ρευστό (Bergman et al., 2011).	9
Σχήμα 1.2.4: Απώλεια θερμότητας ενός θερμού αντικειμένου στο κενό μέσω ακτινοβολίας (Cengel, 2006).	9
Σχήμα 1.2.5: Πιθανοί μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας σε υγρά, στερεά και αέρια (Cengel and Ghajar, 2015).	10
Σχήμα 1.3.1: Ροή θερμότητας με αγωγή σε σύνθετο τοίχο (Moss, 2007).	12
Σχήμα 1.3.2: Μετάδοση θερμότητας από την εξωτερική επιφάνεια τοίχου προς το περιβάλλον με συναγωγή και ακτινοβολία (Cengel and Ghajar, 2015).	12
Σχήμα 1.3.3: Ροή θερμότητας από την οροφή προς τη στέγη και ακολούθως προς το περιβάλλον (Cengel and Ghajar, 2015).	13
Σχήμα 1.4.1: Μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας (Whitaker, 1977).	15
Σχήμα 1.4.2: Μετάδοση πυρκαγιάς σε γειτονικό κτίριο μέσω ακτινοβολίας (O'Connor, 2016).	15
Σχήμα 2.2.1: Όγκος ελέγχου για μονοδιάστατη ροή θερμότητας σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Kreith et al., 2010).	25
Σχήμα 2.2.2: Μονοδιάστατη ροή θερμότητας σε κύλινδρο μεγάλου μήκους (Cengel and Ghajar, 2015).	27
Σχήμα 2.2.3: Μονοδιάστατη ροή θερμότητας σε σφαίρα (Cengel and Ghajar, 2015).	29
Σχήμα 2.2.4: Τριδιάστατη μεταφορά θερμότητας με αγωγή σε ορθογώνιο όγκο ελέγχου (Han, 2016).	30
Σχήμα 2.2.5: Απειροστό στοιχείο όγκου σε κυλινδρικές συντεταγμένες (Bergman et al., 2011, Learning, 2017).	32
Σχήμα 2.2.6: Απειροστό στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες (Learning, 2017).	33
Σχήμα 2.3.1: Ρυθμός ροής θερμότητας δια μέσου ενός τοιχώματος (Cengel and Ghajar, 2015).	36
Σχήμα 2.3.2: α) επιφάνεια με ροή θερμότητας, και β) αδιαβατική επιφάνεια (Han, 2016).	36
Σχήμα 2.3.3: Μετάδοση θερμότητας με συναγωγή από (και προς) το περιβάλλον προς το τοίχωμα (Cengel and Ghajar, 2015).	37
Σχήμα 2.3.4: Μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία από το περιβάλλον προς και από το τοίχωμα (Cengel and Ghajar, 2015).	38

Σχήμα 2.3.5: α) Ιδεατή επαφή δύο σωμάτων, β) πτώση θερμοκρασίας λόγω αντίστασης επαφής (Taler & Duda, 2006).	39
Σχήμα 2.3.6: Προφίλ συμμετρικής θερμοκρασιακής κατανομής σε τοίχωμα (Cengel and Ghajar, 2015).	41
Σχήμα 3.1.1: Πλάκα μήκους L , πάχους b (Hahn & Özisik, 2012).	44
Σχήμα 3.1.2: Ημι-άπειρο τριδιάστατο στερεό σε καρτεσιανές συντεταγμένες (Hahn & Özisik, 2012).	47
Σχήμα 3.1.3: Ημι-άπειρος κύλινδρος με $T = T(r, z)$ (Hahn & Özisik, 2012).	56
Σχήμα 3.1.4: Στερεό ημισφαίριο (Hahn & Özisik, 2012).	65
Σχήμα 3.2.1: Ορθογωνική πλάκα διαστάσεων $L \times W$ (Hahn & Özisik, 2012).	74
Σχήμα 3.2.2: Ορθογωνική πλάκα διαστάσεων $L \times 2W$, με πηγή θερμότητας (Hahn & Özisik, 2012).	76
Σχήμα 3.3.1: Μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε τοίχωμα (Welty et al., 2019).	85
Σχήμα 3.3.2: Αντίσταση συναγωγής σε επιφάνεια (Cengel, 2015).	86
Σχήμα 3.3.3: Αντιστάσεις αγωγής και ακτινοβολίας σε μια επιφάνεια (Cengel, 2015).	87
Σχήμα 3.3.4: α) Μετάδοση θερμότητας σε έναν τοίχο β) Θερμικές αντιστάσεις (Bergman, 2011).	88
Σχήμα 3.3.5: Μετάδοση θερμότητας σε πολυστρωματικό τοίχωμα με τα αντίστοιχα πάχη των στρωμάτων (Welty et al., 2019).	89
Σχήμα 3.3.6: Κύλινδρος εσωτερικής ακτίνας r_1 και θερμοκρασίας $T_s, 1$ (Hirbodi & Jafarpur, 2020).	90
Σχήμα 4.1.1: Μετάδοση θερμότητας σε σώμα αυθαίρετης γεωμετρίας (Kothadaraman, 2006).	95
Σχήμα 4.1.2: Πτώση ή αύξηση της θερμοκρασίας για διάφορες τιμές του b (Kothadaraman, 2006).	96
Σχήμα 4.2.1: Μονοδιάστατη, μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας σε τοίχωμα (Yevtushenko & Kuciej, 2012).	98
Σχήμα 4.2.2: Τριδιάστατη σπλάκα σε καρτεσιανές συντεταγμένες (Hahn & Özisik, 2012).	101
Σχήμα 4.3.1: Τοίχωμα πάχους L με ροή θερμότητας q_0 στο $x = 0$, και συνθήκη συναγωγής στο $x = L$ (Hahn & Özisik, 2012).	128
Σχήμα 4.4.1: Μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας σε ημι-άπειρο στερεό (Kreith et al., 2010).	146
Σχήμα 4.4.2: Ημι-άπειρο στερεό με μετάδοση θερμότητας στην ημι-άπειρη επιφάνεια $0 \leq x \leq \infty$ (Hahn & Özisik, 2012).	147
Σχήμα 4.4.3: Διάγραμμα της συνάρτησης σφάλματος $\operatorname{erf} \eta$ (Cengel, 2006).	151

Σχήμα 4.4.4: Θερμοκρασιακή κατανομή για διάφορες χρονικές στιγμές t , με αρχική θερμοκρασία $T_i = 100\text{ K}$ (Hahn & Özisik, 2012).	152
Σχήμα 4.4.5: Ημι-άπειρο χωρίο με $0 < x \leq \infty$ και $0 \leq y \leq b$ (Hahn & Özisik, 2012).	155
Σχήμα 4.4.7: Ημι-άπειρη γωνία (Hahn & Özisik, 2012).	158
Σχήμα 4.4.8: Ημι-άπειρος στερεός κύλινδρος (Hahn & Özisik, 2012).	164
Σχήμα 6.1.1: Συναρτήσεις Bessel J_0 και Y_0 (Boyce & DiPrima, 2017).	180
Σχήμα 6.1.2: Συναρτήσεις Bessel J_1 και Y_1 (Boyce & DiPrima, 2017).	180
Σχήμα 6.1.3: Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel (Hahn & Özisik, 2012).	182
Σχήμα 6.2.1: Διάγραμμα των πέντε πρώτων πολυωνύμων P_n (Hahn & Özisik, 2012).	183

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο και υπόβαθρο

Η μετάδοση της θερμότητας απασχολεί ολοένα και περισσότερο τους μηχανικούς όλων των ειδικοτήτων, καθώς έχει σημαντικό ρόλο σε μελέτες όπως ο σχεδιασμός ηλεκτρονικών συσκευών, οχημάτων, σταθμών παραγωγής ενέργειας, γεφυρών, και κατασκευών και διάφορων άλλων συστημάτων. Αποτελεί ένα από τα αντικείμενα ενδιαφέροντος του πολιτικού μηχανικού, αφού για τον σχεδιασμό κτιρίων γίνονται μελέτες για τη μετάδοση θερμότητας κυρίως σε τοίχους, δάπεδο και οροφή (Cengel and Ghajar, 2015).

Όσον αφορά τα κτίρια, η βασική λειτουργία τους εκτός από την ασφάλεια είναι και η θερμική μόνωση με στόχο την επίτευξη καλών συνθήκων διαβίωσης. Ανάλογα με το κλίμα της κάθε περιοχής, ο σχεδιασμός της κατασκευής γίνεται έτσι ώστε η δομή της και τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν, να βοηθούν στην ενίσχυση της θερμικής άνεσης, η οποία πρέπει να είναι κατάλληλη για τις δεδομένες κλιματικές συνθήκες (Balaji et al., 2014).

Η θερμοκρασία ενός κτιρίου εν γένει διαφέρει από αυτήν του εξωτερικού περιβάλλοντος, καθώς δεν υπάρχει θερμοδυναμική ισορροπία μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, γίνεται μετάδοση θερμότητας από το ένα σύστημα στο άλλο, με αποτέλεσμα το κτίριο να χάνει ή να κερδίζει ενέργεια. Οι βασικότερες πηγές θερμότητας είναι ο τρόπος θέρμανσης του χώρου, οι ακτίνες του ηλίου οι οποίες διεισδύουν σε διαφανή ή αδιαφανή χωρίσματα, οι άνθρωποι που βρίσκονται στο κτίριο, οι ηλεκτρικές συσκευές, καθώς και ο φωτισμός, ενώ απώλειες θερμότητας μπορούν να προκληθούν από την ύπαρξη διάφορων χωρισμάτων, λόγω αερισμού, έλλειψης θερμομόνωσης και άλλων παραγόντων. Η απώλεια ή η πρόσληψη θερμότητας μεταβάλλονται ανάλογα με τις περιβαλλοντικές ή καιρικές συνθήκες, όπως ο εξωτερικός αέρας ή η ηλιακή ακτινοβολία, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η θερμική ισορροπία του κτιρίου (Babiarz and Szymanski, 2020, Püreikis et al., 2010).

Το πρόβλημα της μετάδοσης θερμότητας λαμβάνεται υπόψιν για τον έλεγχο της ενεργειακής απόδοσης των κτιρίων, η οποία είναι απαραίτητη για τον σχεδιασμό, αλλά και τη λειτουργία της κατασκευής ή τμήματος αυτής. Με στόχο τη βελτίωση της ενεργειακής απόδοσης, εφαρμόζονται διάφοροι νομικοί κανονισμοί (Babiarz and Szymanski, 2020).

Εκτός από τα στοιχεία του κτιρίου, η επίδραση της θερμότητας θεωρείται σημαντική και στους πασσάλους, καθώς η συμπεριφορά τους μεταβάλλεται ανάλογα με το αν το φορτίο που δέχονται θερμαίνεται ή ψύχεται. Επίσης, η ροή της θερμότητας επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό το οδόστρωμα και την απόδοσή του, αφού οι θερμοκρασίες, ανάλογα με το αν είναι χαμηλές ή υψηλές, επιδρούν όχι μόνο στο ιξώδες της ασφάλτου αλλά και στο ποσοστό

υγρασίας του οδοστρώματος. Επιπλέον, η θερμότητα είναι κρίσιμος παράγοντας ο οποίος επηρεάζει την συμπεριφορά των γεφυρών. Οι γέφυρες από σκυρόδεμα, λόγω των περιβαλλοντικών συνθηκών, της τοποθέτησης της ασφάλτου, ή άλλων επιδράσεων, επηρεάζονται θερμικά. Ειδικότερα, η κατανομή της θερμοκρασίας είναι μη γραμμική, δηλαδή η θερμοκρασία μεταβάλλεται από την εξωτερική επιφάνεια προς το εσωτερικό της κατασκευής με τον χρόνο, εξαιτίας του σκυροδέματος το οποίο χαρακτηρίζεται από μικρή θερμική αγωγιμότητα. Εξαιτίας της μη γραμμικότητας η κατανομή της θερμοκρασίας δεν προσδιορίζεται εύκολα, και για τον λόγο αυτό γίνονται διάφορες απλοποιήσεις με αποτέλεσμα να δημιουργούνται προβλήματα που αφορούν τη δομική συμπεριφορά της γέφυρας (Bourne-Webb et al., 2013, Branco & Mendes, 1993, Hermansson et al., 2009).

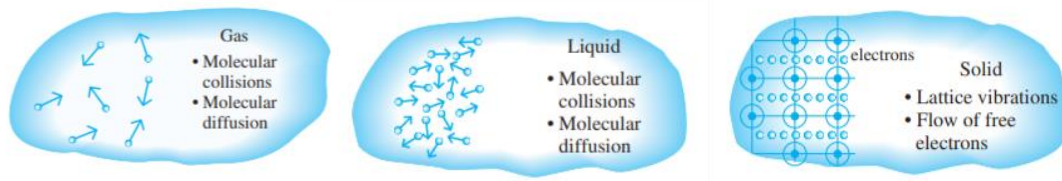
1.2 Μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας

Θερμότητα ορίζεται η ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σύστημα σε ένα άλλο, λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ των δύο συστημάτων. Η μετάδοση αυτή πραγματοποιείται από το σύστημα με την υψηλότερη θερμοκρασία προς αυτό με τη χαμηλότερη, μέχρι τα δύο συστήματα να αποκτήσουν την ίδια θερμοκρασία. Η θερμότητα μπορεί να μεταφερθεί με τρεις τρόπους: αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία (Cengel and Ghajar, 2015).

Παρακάτω παρουσιάζονται οι τρεις μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας.

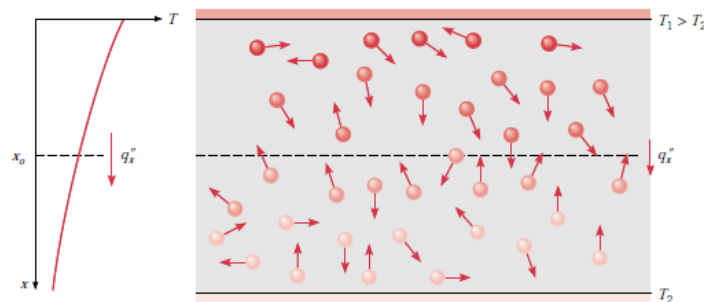
- **Αγωγή**

Αγωγή θεωρείται η μετάδοση ενέργειας από τα περισσότερο ενεργητικά σωματίδια ύλης στα λιγότερο ενεργητικά, λόγω των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των σωματιδίων. Τα σωματίδια με την υψηλότερη μοριακή ενέργεια έχουν πιο υψηλές θερμοκρασίες, και όταν συγκρουστούν με γειτονικά μόρια γίνεται μετάδοση ενέργειας σε εκείνα με τη λιγότερη ενέργεια. Η μετάδοση θερμότητας με αγωγή, είναι εφικτή στα στερεά, τα υγρά, και τα αέρια. Στα υγρά και αέρια, η μετάδοση θερμότητας γίνεται εξαιτίας των συγκρούσεων και της διάχυσης των μορίων, ενώ στα στερεά λόγω των δονήσεων και της κίνησης των ελεύθερων ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται στον Σχήμα 1.2.1 (Cengel and Ghajar, 2015, Bergman et al., 2011).



Σχήμα 1.2.1: Μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε αέρια, υγρά και στερεά (Cengel and Ghajar, 2015).

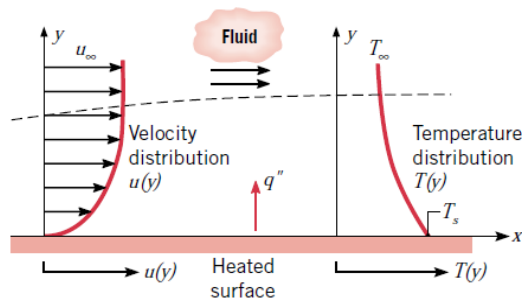
Για να γίνει πιο κατανοητή η αγωγή, στο Σχήμα 1.2.2 φαίνονται δύο επιφάνειες οι οποίες διατηρούνται σε διαφορετικές θερμοκρασίες, με την άνω επιφάνεια να βρίσκεται σε μεγαλύτερη θερμοκρασία. Τα σωματίδια κινούνται τυχαία, με αποτέλεσμα να συγκρούονται μεταξύ τους και να γίνεται μετάδοση ενέργειας με αγωγή προς τα θετικά του άξονα x (Bergman et al., 2011).



Σχήμα 1.2.2: Μετάδοση θερμότητας μεταξύ δύο επιφανειών (Bergman et al., 2011).

• Συναγωγή

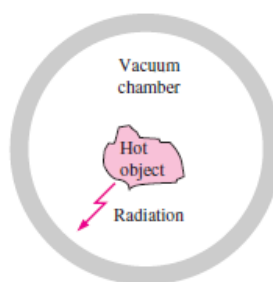
Η μετάδοση θερμότητας με συναγωγή πραγματοποιείται ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα στερεό, και μπορεί να γίνει με δύο τρόπους, είτε μέσω της διάχυσης, δηλαδή της τυχαίας κίνησης των μορίων, είτε με τη μαζική κίνηση μορίων του ρευστού. Το Σχήμα 1.2.3, δείχνει τη μετάδοση η οποία εκτελείται από μία επιφάνεια προς ένα ρευστό, το οποίο βρίσκεται σε κίνηση, με διαφορετικές θερμοκρασίες (Rohsenow et al., 1998).



Σχήμα 1.2.3: Μετάδοση θερμότητας από μία επιφάνεια προς ένα ρευστό (Bergman et al., 2011).

- **Ακτινοβολία**

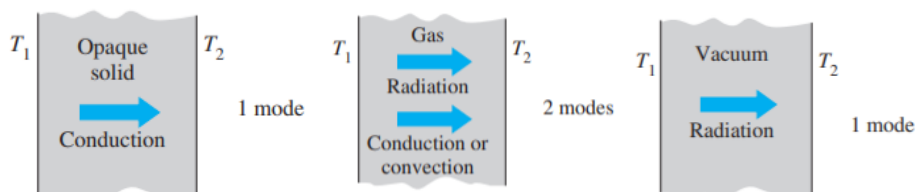
Η μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία μεταξύ δύο αντικειμένων με διαφορετικές θερμοκρασίες, γίνεται μέσω ανταλλαγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Οποιαδήποτε επιφάνεια με θερμοκρασία μεγαλύτερη των $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$, εκπέμπει, απορροφά και ανακλά ακτινοβολία, ανάλογα με το είδος της. Στην ακτινοβολία, σε αντίθεση με την αγωγή και την συναγωγή, δεν είναι απαραίτητη η παρουσία κάποιου υλικού μέσου, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει πως θα υπάρχει εξασθένηση στο κενό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.4. Η μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία λαμβάνει χώρα σε στερεά, υγρά, και αέρια (Cengel, 2006, Moss, 2007).



Σχήμα 1.2.4: Απώλεια θερμότητας ενός θερμού αντικειμένου στο κενό μέσω ακτινοβολίας (Cengel, 2006).

Οι τρεις μηχανισμοί μετάδοσης που αναφέρθηκαν, δεν μπορούν να συνυπάρξουν σε ένα μέσο. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν σε ένα μέσο να συμβάλλουν δύο μηχανισμοί ταυτόχρονα. Ειδικότερα, στα αδιαφανή στερεά η μετάδοση γίνεται μόνο με αγωγή, ενώ στα διαφανή

μπορεί να γίνει με αγωγή καθώς και με ακτινοβολία. Επίσης, σε ένα στερεό που έχει τις επιφάνειές του εκτεθειμένες σε υγρό, η μετάδοση είναι εφικτή με συναγωγή ή και ακτινοβολία. Τέλος, η μετάδοση θερμότητας στο κενό γίνεται μέσω ακτινοβολίας. Στο Σχήμα 1.2.5 φαίνονται οι παραπάνω περιπτώσεις (Cengel and Ghajar, 2015).



Σχήμα 1.2.5: Πιθανοί μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας σε αδιαφανές στερεό, σε αέριο και στο κενό (Cengel and Ghajar, 2015).

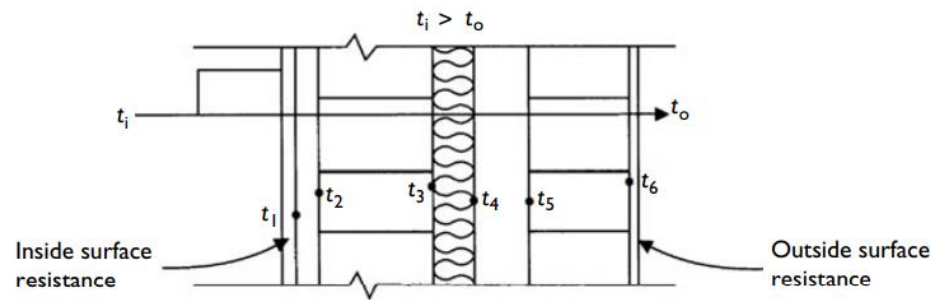
1.3 Μετάδοση Θερμότητας σε Κτίρια

Τα κτίρια είναι κατασκευές με πολύπλοκες συνδέσεις και γεωμετρίες, καθώς και συνοριακές επιφάνειες στις οποίες επιβάλλονται ανάλογες συνοριακές συνθήκες, στον χώρο και τον χρόνο. Η θερμοκρασία του αέρα στο εσωτερικό του κτιρίου επηρεάζεται από τις συνθήκες του εξωτερικού περιβάλλοντος, όπως η θερμοκρασία, ο άνεμος, η ηλιακή ακτινοβολία και ο συννεφιασμένος ουρανός. Εκτός από τις εξωτερικές συνθήκες, σημαντικό ρόλο παίζει και ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας του τοίχου ή το όφελος θερμότητας από ηλεκτρικές συσκευές, ακόμα και από τον φωτισμό (Gerlich, 2011).

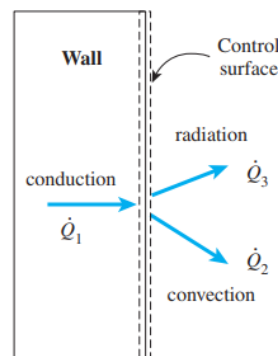
Γενικότερα, η μετάδοση θερμότητας σε ένα κτίριο πραγματοποιείται από το περιβάλλον προς το κέλυφος του κτιρίου και στη συνέχεια προς το εσωτερικό του, εφόσον η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι υψηλότερη. Αντίθετα το κτίριο χάνει θερμότητα η οποία μεταφέρεται με αγωγή μέσω των εξωτερικών τοιχωμάτων. Η μετάδοση θερμότητας στα τοιχώματα μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου και εξαρτάται από το κλίμα, την ηλιακή ακτινοβολία, καθώς και τις θερμικές ιδιότητες των υλικών, κ.α. Πολλές φορές ωστόσο, ανάλογα με τις τιμές των θερμικών ιδιοτήτων και τους υπόλοιπους παράγοντες, η μεταβολή της θερμοκρασίας των εξωτερικών τοιχωμάτων δεν επηρεάζει το εσωτερικό του κτιρίου. Η αγωγή της θερμότητας πραγματοποιείται επίσης και μέσω των εσωτερικών τοιχωμάτων, του

δαπέδου ή των οροφών, και διάφορων ανοιγμάτων. Τα περισσότερα προβλήματα μετάδοσης θερμότητας με αγωγή σε ένα κτίριο, αφορούν τον προσδιορισμό της απώλειας ή της πρόσληψης θερμότητας στο εξωτερικό κέλυφος της κατασκευής, αλλά και την αποθήκευση της θερμότητας στο εσωτερικό της. Ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν, τέτοιου είδους προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους. Παράλληλα με την αγωγή, η θερμότητα μεταδίδεται με συναγωγή από ή προς τις εξωτερικές επιφάνειες του κτιρίου, μέσω κοίλων τοιχωμάτων, μεταξύ των υαλοπινάκων των παραθύρων, στο εσωτερικό του κτιρίου εξαιτίας του αέρα κ.α. Τέλος, σε μία κτιριακή κατασκευή η θερμότητα μπορεί να μεταδοθεί με ακτινοβολία. Ειδικότερα, οι εξωτερικές επιφάνειες του κτιρίου, απορροφούν και εκπέμπουν ηλιακή ακτινοβολία, διάφορες ηλεκτρικές συσκευές οι οποίες παράγουν θερμική ενέργεια μεταδίδουν θερμότητα προς τα εσωτερικά τοιχώματα, καθώς επίσης τα τζάμια παραθύρων απορροφούν ή αντανακλούν ηλιακή ακτινοβολία (Simões et al., 2019, Kusuda, 1977).

Στο Σχήμα 1.3.1 παρουσιάζεται ένας εξωτερικός τοίχος, ο οποίος αποτελείται από διάφορα υλικά, με το κάθε υλικό να βρίσκεται σε συγκεκριμένη θερμοκρασία. Η θερμότητα μεταφέρεται από το εσωτερικό του τοίχου με θερμοκρασία t_i , προς την εξωτερική επιφάνεια με θερμοκρασία t_o , με αγωγή. Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως οι θερμοκρασίες των επιφανειών του τοίχου μειώνονται προς τις γωνίες, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η υγρασία και να δημιουργούνται προβλήματα. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται εάν υποθεθεί ότι ολόκληρη η επιφάνεια του τοίχου, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών, είναι ισοθερμική, κάτι που στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Η μετάδοση θερμότητας από την εξωτερική επιφάνεια του τοίχου προς το περιβάλλον γίνεται με τις διαδικασίες συναγωγής και ακτινοβολίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.2 (Davies, 2004, Moss, 2007).

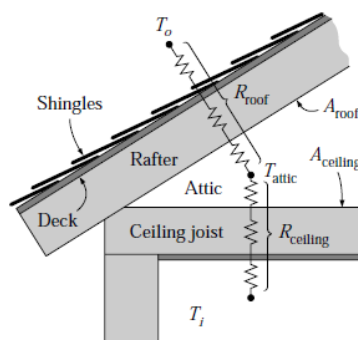


Σχήμα 1.3.1: Ροή θερμότητας με αγωγή σε σύνθετο τοίχο (Moss, 2007).



Σχήμα 1.3.2: Μετάδοση θερμότητας από την εξωτερική επιφάνεια τοίχου προς το περιβάλλον με συναγωγή και ακτινοβολία (Cengel and Ghajar, 2015).

Σημαντικό ποσοστό θερμότητας μεταφέρεται από ή προς το περιβάλλον μέσω της στέγης, εφόσον υπάρχει άνοιγμα ανάμεσα στην οροφή και τη στέγη, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3.3, το οποίο βοηθά στον αερισμό μέσω της εξαγωγής του θερμού αέρα από τα ανώτερα στρώματα. Ανάλογα με τη μορφή και τη γεωμετρία της στέγης, μεταφέρεται πιο εύκολα ή δύσκολα θερμότητα. Όσον αφορά τις μακροπρόθεσμες απώλειες από το δάπεδο, θεωρούνται γενικά μικρές. Ειδικότερα, δεν κρίνεται απαραίτητο να υπολογίζονται με την ίδια ακρίβεια σε σχέση με τις απώλειες από τοιχώματα, παράθυρα ή λόγω εξαερισμού. Αντιθέτως, οι βραχυπρόθεσμες απώλειες από το δωμάτιο προς το δάπεδο ή το αντίστροφο, μπορεί να θεωρηθούν σημαντικότερες (Davies, 2004, Tang et al., 2003).



Σχήμα 1.3.3: Ροή θερμότητας από την οροφή προς τη στέγη και ακολούθως προς το περιβάλλον (Cengel and Ghajar, 2015).

1.4 Μετάδοση Πυρκαγιάς σε Κατασκευές

Η φωτιά περιλαμβάνει διάφορες χημικές αντιδράσεις μεταξύ εύφλεκτων υλικών και του οξυγόνου της ατμόσφαιρας. Όταν βρίσκεται υπό έλεγχο, αποτελεί σημαντική πηγή θερμότητας για τις κατασκευές και την κάλυψη των ανθρώπινων αναγκών, ενώ η ενέργεια που παράγει αξιοποιείται σε μεγάλο βαθμό από τις περισσότερες βιομηχανίες. Ωστόσο, αν η φωτιά αναπτυχθεί ανεξέλεγκτα, υπάρχει σοβαρός κίνδυνος για υλικές, και όχι μόνο, καταστροφές. Συνήθως οι περισσότερες κατασκευές που κινδυνεύουν λόγω πυρκαγιάς, είναι κατοικίες οι οποίες δεν έχουν σχεδιαστεί με εξελιγμένες μεθόδους. Για τον λόγο αυτό, είναι απαραίτητη η κατανόηση της συμπεριφοράς της φωτιάς από τους μηχανικούς, με σκοπό να λαμβάνονται τα κατάλληλα μέτρα και οι κατασκευές να σχεδιάζονται με στόχο την προστασία τους από την εξάπλωση της πυρκαγιάς (Drysedale, 2011, Purkiss, 2013).

Η μηχανική πυροπροστασίας αφορά διάφορους κλάδους της μηχανικής. Ειδικότερα, για μία κτιριακή κατασκευή, ένας αρχιτέκτονας είναι υπεύθυνος για την διάταξη των δομικών στοιχείων του κτιρίου, με σκοπό να είναι εύκολη όχι μόνο η πρόσβαση σε μηχανισμούς πυρόσβεσης, αλλά και η ασφαλής έξοδος από το κτίριο. Αντίστοιχα, θα πρέπει η ηλεκτρολογική και μηχανολογική μελέτη να περιλαμβάνουν τον σχεδιασμό συστημάτων ανίχνευσης πυρκαγιάς, καπνού, αλλά και πυρόσβεσης. Η προστασία έναντι πυρκαγιάς σχετίζεται άμεσα με το επάγγελμα του πολιτικού μηχανικού, καθώς στις μελέτες κατασκευών εισάγονται διάφοροι κανονισμοί οι οποίοι αφορούν την αντοχή έναντι πυρκαγιάς, τις

διαστάσεις και τη γεωμετρία των δομικών στοιχείων, τον αριθμό και τη θέση των ανοιγμάτων στα τοιχώματα. Μια μελέτη για την πυροπροστασία περιλαμβάνει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της πυρκαγιάς, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται και εξαπλώνεται, τη δημιουργία υπολογιστικών μοντέλων τα οποία προσδιορίζουν τη θερμοκρασία που αναπτύσσεται, την ταχύτητα με την οποία εξαπλώνεται η φωτιά, τον τρόπο επίδρασης των ανοιγμάτων και του αερισμού, αλλά και της συμπεριφοράς των δομικών στοιχείων. Ο αποτελεσματικός σχεδιασμός έναντι πυρκαγιάς, απαιτεί τον συντονισμό και την συνεργασία όλων των επιβλεπόντων μηχανικών καθ' όλη τη διάρκεια του σχεδιασμού (Lataille, 2003).

Στην ενότητα 1.2 περιγράφηκαν οι τρεις δυνατοί μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας, οι οποίοι είναι η αγωγή, η συναγωγή και η ακτινοβολία. Σε μια πυρκαγιά, μπορεί να συνεισφέρουν και οι τρεις, ενώ ανάλογα με την τοποθεσία και τις συνθήκες μπορεί να θεωρηθεί κάποιος μηχανισμός ως κυρίαρχος. Για παράδειγμα, η εξάπλωση της πυρκαγιάς (και η μετάδοση της θερμότητας) στα δομικά στοιχεία μιας κατασκευής πραγματοποιείται κυρίως μέσω της αγωγής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συναγωγή περιλαμβάνει τη μετάδοση της θερμότητας μεταξύ ενός κινούμενου ρευστού και ενός στερεού. Κατά συνέπεια, εμφανίζεται σε όλες τις φάσεις της πυρκαγιάς, δεδομένου ότι το περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσεται η πυρκαγιά περιλαμβάνει αέρια σωματίδια, η κίνηση των οποίων επηρεάζει τη συμπεριφορά της φλόγας της πυρκαγιάς. Η μετάδοση της θερμότητας με ακτινοβολία δεν απαιτεί την παρουσία κάποιου στερεού μέσου, σε αντίθεση με την αγωγή. Θεωρείται ένας από τους κυρίαρχους μηχανισμούς μετάδοσης και εξάπλωσης της πυρκαγιάς, καθώς τα αντικείμενα τα οποία απέχουν ορισμένη απόσταση από τη φωτιά θερμαίνονται με ακτινοβολία μέσω των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.1. Η εξάπλωση της πυρκαγιάς από ένα κτίριο σε ένα άλλο γειτονικό, εξαρτάται από την ένταση της θερμικής ακτινοβολίας η οποία μεταδίδεται στα εξωτερικά τοιχώματα του κτιρίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.2, ή απευθείας στο εσωτερικό του μέσω της απορρόφησης της ακτινοβολίας από τα παράθυρα. Για την αποφυγή της εξάπλωσης της πυρκαγιάς εκτιμώνται αποστάσεις ασφαλείας μεταξύ των κτιρίων, οι οποίες προσδιορίζονται μετά από μελέτες που περιλαμβάνουν τον υπολογισμό του ρυθμού μετάδοσης θερμότητας, την ικανότητα

εκπομπής, το ύψος των φλογών, τον ρυθμό ροής της ακτινοβολίας, και πολλών άλλων παραγόντων (Drysdale, 2011, O'Connor, 2016).

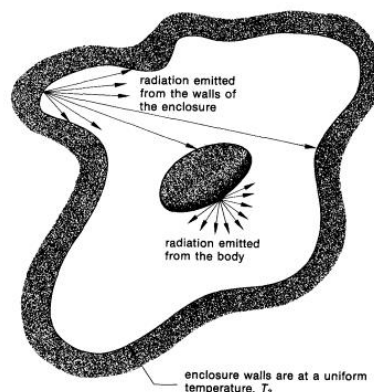
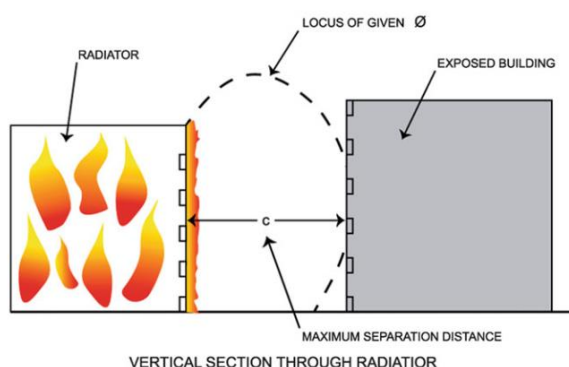


Fig. 1.3.5 Radiant energy exchange in an enclosure.

Σχήμα 1.4.1: Μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας (Whitaker, 1977).



Σχήμα 1.4.2: Μετάδοση πυρκαγιάς σε γειτονικό κτίριο μέσω ακτινοβολίας (O'Connor, 2016).

Οι γενικές συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται συνήθως σε κατασκευές παρουσία πυρκαγιάς, είναι οι συνθήκες εισόδου, εξόδου, συμμετρίας, οι ελεύθερες και οι συνοριακές συνθήκες τοιχωμάτων. Η συνοριακή συνθήκη εισόδου αφορά τη ροή του ρευστού προς τη συνοριακή επιφάνεια και προσδιορίζονται η ταχύτητα, ο ρυθμός ροής, ή η πίεση του ρευστού, σε αντίθεση με τη συνθήκη εξόδου, η οποία αφορά την κίνηση του ρευστού εξερχόμενου από τη συνοριακή επιφάνεια. Η συνοριακή συνθήκη συμμετρίας εκφράζει τη συμμετρία της ροής του ρευστού κατά μήκος της συμμετρικής συνοριακής επιφάνειας, ενώ η ελεύθερη συνοριακή συνθήκη, υποδηλώνει τη ροή του ρευστού σε έναν

ελεύθερο χώρο με καθορισμένη πίεση. Τέλος, οι συνοριακές συνθήκες τοιχωμάτων σχετίζονται με τις συνοριακές επιφάνειες του τοιχώματος, στις οποίες μπορεί να επικρατεί είτε καθορισμένη θερμοκρασία, ροή θερμότητας, είτε φυσικές συνοριακές συνθήκες όπως καθορισμένη συναγωγή ή καθορισμένη συναγωγή με ταυτόχρονη ακτινοβολία (Faghri & Sundén, 2008, Wickström, 2016).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετηθεί η μετάδοση θερμότητας και θα προσδιοριστεί η έκφραση της θερμοκρασίας για διάφορες γεωμετρίες στα κύρια συστήματα συντεταγμένων, με αναλυτικές μεθόδους και συγκεκριμένα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Η μέθοδος αυτή είναι η βασική μέθοδος επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν σε αυτό το πλαίσιο, και θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα διπλωματική εργασία ώστε να αναδειχθεί η απλότητα και συνάμα η ισχύς της μεθόδου αυτής. Ωστόσο, τέτοιου είδους προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με διάφορους άλλους τρόπους, όπως με την ολοκληρωτική μέθοδο (προσεγγιστική αναλυτική μέθοδο), τη μέθοδο της θερμικής αντίστασης, τη μέθοδο Laplace, τη μέθοδο συναρτήσεων Green ή ακόμα και με αριθμητικές μεθόδους (Carslaw & Jaeger, 1986, Hahn & Özisik, 2012, Özisik, 2002, Minkowycz, 2006).

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται ο νόμος Fourier για τον ρυθμό μετάδοσης της θερμότητας, καθώς και η διαδικασία κατάστρωσης των διαφορικών εξισώσεων και στα τρία συστήματα συντεταγμένων με τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν ένα πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας. Στο Κεφάλαιο 3 μελετάται η μόνιμη μετάδοση θερμότητας με αγωγή και επιλύονται διάφορα προβλήματα, ομογενή και μη, στο καρτεσιανό, στο κυλινδρικό και στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Επίσης παρουσιάζεται συνοπτικά και η μέθοδος της θερμικής αντίστασης, καθώς ακόμα αναφέρεται και ο παράγοντας σχήματος S ο οποίος είναι χρήσιμος στη περίπτωση σύνθετων γεωμετριών. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 γίνεται αναφορά στα συστήματα εντοπισμένης χωρητικότητας, και παρουσιάζεται ο τρόπος επίλυσης μη μόνιμων προβλημάτων, αλλά και των ημι-άπειρων χωρίων, στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων.

Κεφάλαιο 2 Διαφορική Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας με Αγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναφέρθηκε ο ορισμός της θερμότητας και παρουσιάστηκαν διάφορα προβλήματα μετάδοσης θερμότητας με αγωγή, τα οποία είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για τους πολιτικούς μηχανικούς. Τέτοιου είδους προβλήματα μπορούν να αναλυθούν με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων. Στο παρόν κεφάλαιο, αναφέρονται αρχικά διάφορες έννοιες και ιδιότητες χαρακτηριστικές για ένα μέσο, ενώ στη συνέχεια περιγράφεται η διαδικασία εύρεσης της εξίσωσης της θερμότητας με τη χρήση του νόμου Fourier, σε συστήματα καρτεσιανών, κυλινδρικών, και σφαιρικών συντεταγμένων. Για την πλήρη περιγραφή ενός προβλήματος, εκτός από την εξίσωση, είναι απαραίτητος και ο καθορισμός των συνθηκών που περιγράφουν τη θερμοκρασιακή κατανομή στις επιφάνειες του υπό μελέτη υλικού μέσου. Τέτοιου είδους συνθήκες ονομάζονται συνοριακές, και θα μελετηθούν παρακάτω.

2.1 Γενικές Έννοιες και Νόμος Fourier

Η θερμότητα, σε αντίθεση με τη θερμοκρασία, είναι διανυσματικό μέγεθος. Επομένως για να προσδιοριστεί πλήρως σε ένα σημείο πρέπει να είναι γνωστά η κατεύθυνση και η τιμή της στο σημείο αυτό. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η μετάδοση θερμότητας προς τον θετικό άξονα θεωρείται θετική, ενώ προς τον αρνητικό άξονα αρνητική. Υπενθυμίζεται πως η μετάδοση πραγματοποιείται από την υψηλότερη προς τη χαμηλότερη θερμοκρασία.

Η μετάδοση της θερμότητας σε ένα μέσο, μπορεί να είναι μόνιμη ή μη μόνιμη (μεταβατική). Μόνιμη μετάδοση σημαίνει πως η θερμότητα σε ένα μέσο παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου, σε αντίθεση με τη μη μόνιμη όπου η θερμότητα μεταβάλλεται και εξαρτάται από τον χρόνο. Ωστόσο, η θερμοκρασία όπως και η ροή θερμότητας, τόσο στη μόνιμη όσο και στη μη μόνιμη περίπτωση, μεταβάλλεται συνήθως με τη θέση. Στην ειδική

περίπτωση που υπάρχει μεταβολή θερμοκρασίας με τον χρόνο αλλά όχι με τη θέση, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα εντοπισμένης χωρητικότητας και η μεταβολή αυτή θεωρούμε ότι πραγματοποιείται ομοιόμορφα στον χρόνο (Cengel, 2006).

Επίσης, το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας κατηγοριοποιείται σε μονοδιάστατο, διδιάστατο ή τριδιάστατο, ανάλογα με τις διευθύνσεις στις οποίες γίνεται η μετάδοση. Εν γένει η μετάδοση θερμότητας σε ένα μέσο είναι τριδιάστατη. Παρόλα αυτά, σε κάποιες διευθύνσεις μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Ειδικότερα, αν η μετάδοση είναι αμελητέα (ή ακόμα και μηδενική) σε μία ή δύο διευθύνσεις, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται διδιάστατο ή μονοδιάστατο, αντίστοιχα. Στη συνέχεια η θερμοκρασία θα συμβολίζεται με T και η συνάρτησή της σε καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζεται ως $T(x, y, z, t)$, σε κυλινδρικές ως $T(r, \varphi, z, t)$, και σε σφαιρικές ως $T(r, \varphi, \theta, t)$.

- **Θερμική Αγωγιμότητα**

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας k είναι χαρακτηριστικό μέγεθος για κάθε υλικό και δηλώνει την ικανότητά του να μεταφέρει θερμότητα μέσω αγωγής. Εκφράζεται ως ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας σε μία μονάδα πάχους του υλικού, ανά μονάδα επιφάνειας, ανά μονάδα διαφοράς θερμοκρασίας, και έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. το W/mK. Γενικότερα, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία. Ωστόσο, η μεταβολή αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί θεωρώντας μια μέση τιμή του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k_{avg} , η οποία είναι σταθερή και υπολογίζεται από την Εξ. (2.1.1) ως

$$k_{avg} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T) dT}{T_2 - T_1} \quad (2.1.1)$$

όπου $k(T)$ ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ο οποίος εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Παρατηρείται πως εάν ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας έχει σταθερή τιμή και ανεξάρτητη της θερμοκρασίας (ισχύει δηλαδή $k(T) = k$), τότε από την Εξ. (2.1.1) αναμένεται, όπως είναι λογικό, η τιμή k_{avg} να είναι ίση με k (Cengel and Ghajar, 2015, Hahn & Özisik, 2012).

Σε ισότροπα υλικά ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας είναι βαθμωτό μέγεθος, με σταθερή τιμή ανεξάρτητη της διεύθυνσης. Αντίθετα, σε ανισότροπα υλικά όπως το ξύλο,

διάφορες ίνες, σύνθετα υλικά κ.α., ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας εξαρτάται από τη διεύθυνση και είναι ένας τανυστής 2^{ης} τάξης, ο οποίος δίνεται από την Εξ. (2.1.2) ως

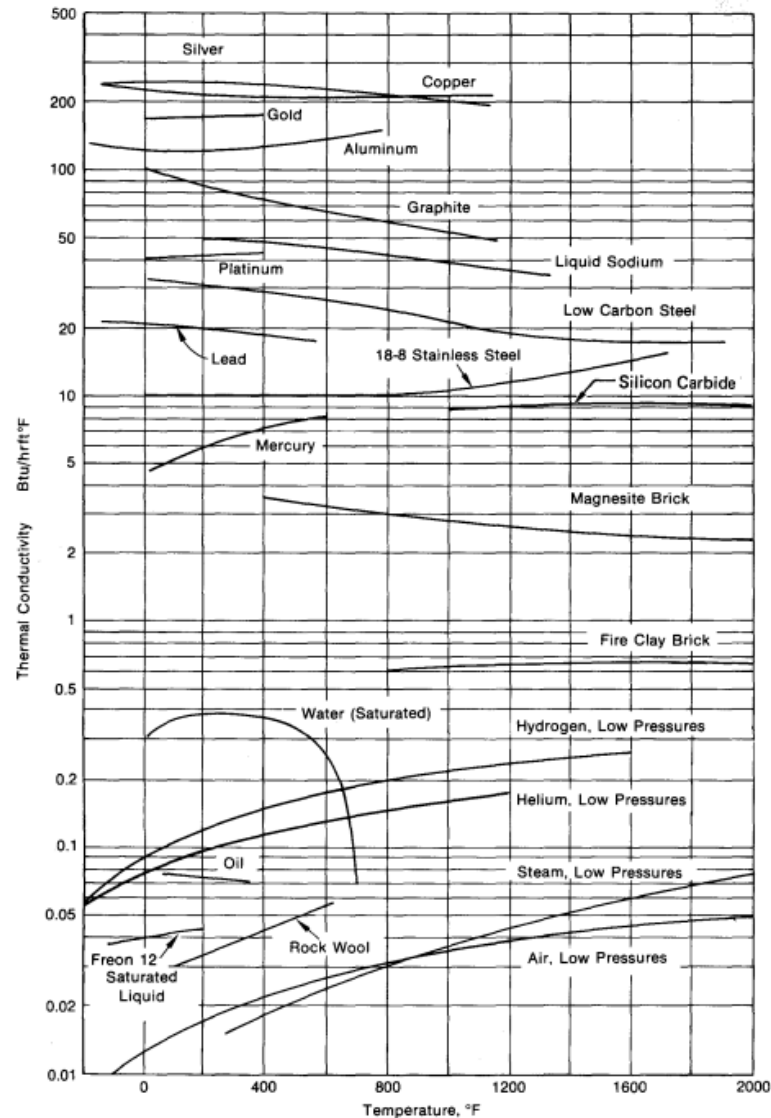
$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

Στον Πίνακα 2.1.1, παρουσιάζονται κάποιες αντιπροσωπευτικές τιμές του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας για διάφορα υλικά, ενώ στον Πίνακα 2.1.2 φαίνονται οι τιμές του k για διάφορες θερμοκρασίες (Huang & Usmani, 1994).

Πίνακας 2.1.1: Τιμές του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k για διάφορα υλικά (Kothandaraman, 2006).

<i>Material</i>	<i>Thermal conductivity, W/mK</i>
Copper	386.0
Aluminium	204.2
Carbon Steel 1% C	43.3
Chrome Steel 20% Cr	22.5
Chrome Nickel Steel	12.8
Concrete	1.13
Glass	0.67
Water	0.60
Asbestos	0.11
Air	0.026

Πίνακας 2.1.2: Η εξάρτηση του k από τη θερμοκρασία για διάφορα στερεά, υγρά και αέρια (Whitaker, 1977).



Κάθε υλικό, εκτός από το να μεταφέρει θερμική ενέργεια, έχει και την ικανότητα να αποθηκεύει θερμότητα. Η ικανότητα αυτή ονομάζεται ειδική θερμότητα, c_p , και έχει μονάδες μέτρησης το $\text{kJ/kg}^\circ\text{C}$. Το γινόμενο ρc_p , όπου ρ η πυκνότητα του υλικού, ονομάζεται θερμοχωρητικότητα, και όπως και η ειδική θερμότητα, δηλώνει την ικανότητα του υλικού να αποθηκεύει θερμότητα, με τη διαφορά ότι το c_p εκφράζεται ανά μονάδα μάζας, ενώ το ρc_p ανά μονάδα όγκου. Η θερμοχωρητικότητα μετράται σε $\text{J/m}^3\text{K}$. Τέλος, μια ακόμη ιδιότητα που σχετίζεται με τη θερμική αγωγιμότητα, είναι η θερμική διαχυτότητα α , η οποία ορίζεται ως

το πηλίκο της θερμότητας που μεταφέρεται με αγωγή, προς την αποθηκευμένη θερμότητα, και εκφράζεται ως

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (2.1.3)$$

Στον Πίνακα 2.1.3, παρουσιάζονται κάποιες αντιπροσωπευτικές τιμές του συντελεστή θερμικής διαχυτότητας για διάφορα υλικά (Cengel, 2006, Rohsenow et al., 1998).

Πίνακας 2.1.3: Τυπικές τιμές του συντελεστή α για διάφορα υλικά (Cengel and Ghajar, 2015).

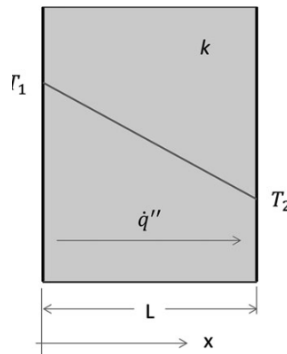
Material	α , m ² /s*
Silver	149×10^{-6}
Gold	127×10^{-6}
Copper	113×10^{-6}
Aluminum	97.5×10^{-6}
Iron	22.8×10^{-6}
Mercury (l)	4.7×10^{-6}
Marble	1.2×10^{-6}
Ice	1.2×10^{-6}
Concrete	0.75×10^{-6}
Brick	0.52×10^{-6}
Heavy soil (dry)	0.52×10^{-6}
Glass	0.34×10^{-6}
Glass wool	0.23×10^{-6}
Water (l)	0.14×10^{-6}
Beef	0.14×10^{-6}
Wood (oak)	0.13×10^{-6}

- **Νόμος Fourier**

Ο ρυθμός με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε ένα μέσο εξαρτάται από τη γεωμετρία, το πάχος, το υλικό του μέσου, καθώς και τη διαφορά θερμοκρασίας. Στο Σχήμα 2.1.1 παρουσιάζεται η μετάδοση θερμότητας σε τοίχωμα πάχους Δx , εμβαδού A , κάθετο στη διεύθυνση μετάδοσης θερμότητας, και διαφοράς θερμοκρασίας $\Delta T = T_2 - T_1$, με σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Ο ρυθμός αγωγής θερμότητας, είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας και του εμβαδού, ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογος του πάχους. Για μονοδιάστατα προβλήματα εκφράζεται από τον (εμπειρικό) νόμο Fourier στη μορφή:

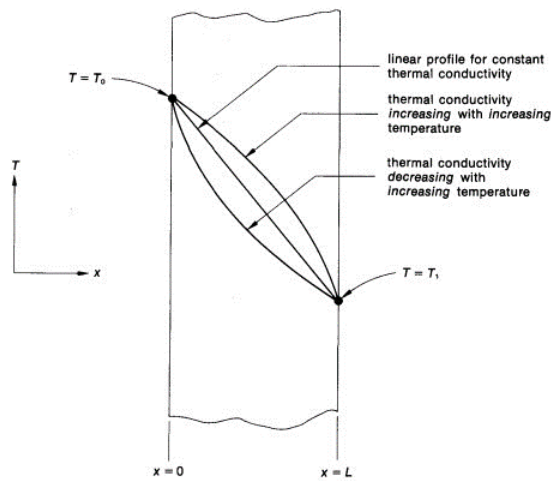
$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (\text{W}) \quad (2.1.4)$$

όπου k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, και $\frac{dT}{dx}$ η βαθμίδα της θερμοκρασίας. Η μονάδα μέτρησης του ρυθμού μετάδοσης της θερμότητας με αγωγή, Q , στο S.I. είναι το Watt (Cengel and Ghajar, 2015).



Σχήμα 2.1.1: Ροή θερμότητας από την υψηλότερη θερμοκρασία T_1 προς τη χαμηλότερη T_2 (Wickström, 2016).

Στο Σχήμα 2.1.2 παρουσιάζεται το προφίλ της θερμοκρασίας για αυξανόμενο συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας με την αύξηση της θερμοκρασίας, και το αντίστροφο.



Σχήμα 2.1.2: Προφίλ θερμοκρασίας για διαφορετικό k (Whitaker, 1977).

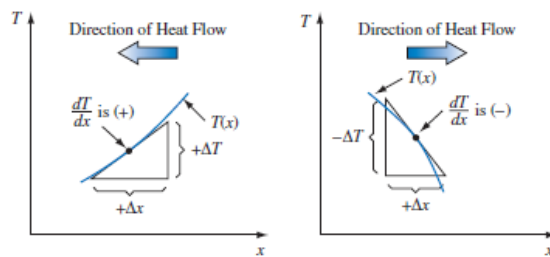
Αντίστοιχα, μπορεί να οριστεί και ο ρυθμός ροής της θερμότητας, ο οποίος εκφράζει τη ροή της θερμότητας ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα επιφάνειας, και εκφράζεται από τη Εξ. (2.1.5) ως

$$\vec{q}' = -k\vec{\nabla}T \quad (\text{W/m}^2) \quad (2.1.5)$$

ή για μονοδιάστατη ροή στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την Εξ. (2.1.6) ως

$$q' = -k \frac{dT}{dx} \quad (\text{W/m}^2) \quad (2.1.6)$$

Η βαθμίδα της θερμοκρασίας $\frac{dT}{dx}$ αντιπροσωπεύει την κλίση της καμπύλης της θερμοκρασίας σε ένα διάγραμμα $T - x$. Στο Σχήμα 2.1.3 παρουσιάζεται η κλίση $\frac{dT}{dx}$, για θετική και αρνητική ροή θερμότητας, αντίστοιχα (Hahn & Özisik, 2012).



Σχήμα 2.1.3: Κλίση θερμοκρασίας για θετική και αρνητική ροή θερμότητας (Kreith et al., 2010).

Στο Σχήμα 2.1.4 παρουσιάζεται ένας διαφορικός όγκος σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Εάν P είναι ένα σημείο ισοθερμικής επιφάνειας και n ένα διάνυσμα κάθετο σε αυτή, τότε ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας στο σημείο P γράφεται με την Εξ. (2.1.7) ως

$$q_n = -kA \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{W}) \quad (2.1.7)$$

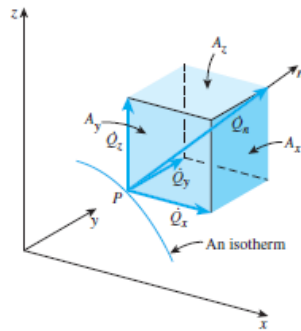
και μπορεί να εκφραστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως

$$\vec{q}_n = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} \quad (2.1.8)$$

όπου, $\vec{i}$, $\vec{j}$, και $\vec{k}$, είναι τα ορθομοναδιαία διανύσματα και q_x , q_y , και q_z , είναι οι ρυθμοί μετάδοσης θερμότητας στις διευθύνσεις x , y , και z αντίστοιχα, και ορίζονται ως

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.1.9)$$

με A_x , A_y , και A_z , τις κάθετες επιφάνειες στις διευθύνσεις x , y , και z αντίστοιχα (Cengel and Ghajar, 2015).



Σχήμα 2.1.4: Το διάνυσμα μετάδοσης θερμότητας, κάθετο στην ισοθερμική επιφάνεια (Cengel and Ghajar, 2015).

- **Παραγωγή Θερμότητας**

Σε ένα μέσο, εκτός από τη μετάδοση θερμότητας, είναι εφικτή και η μετατροπή διάφορων ειδών ενέργειας, όπως ηλεκτρική, μηχανική και χημική, σε θερμική. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται παραγωγή θερμότητας. Ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, συμβολίζεται με το $\dot{g}$ και έχει μονάδα μέτρησης το W/m^3 , ενώ ο συνολικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας συμβολίζεται συχνά με $\dot{E}_g$, με μονάδα μέτρησης το W (Cengel, 2006).

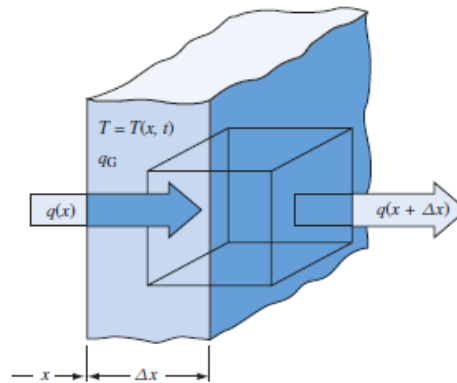
2.2 Γενική Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας με Αγωγή/Η Εξίσωση Διάχυσης Θερμότητας

Σε προβλήματα μετάδοσης θερμότητας με αγωγή, επιβάλλονται στο μέσο κάποιες συνοριακές συνθήκες με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα πεδίο θερμοκρασίας. Το πεδίο αυτό δηλώνει την κατανομή της θερμοκρασίας στο μέσο, δηλαδή τη μεταβολή της στον χώρο και τον χρόνο. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί η διαδικασία προσδιορισμού της θερμοκρασιακής κατανομής σε μονοδιάστατα και πολυδιάστατα προβλήματα. Από τη στιγμή που γίνεται γνωστή η κατανομή της θερμοκρασίας, είναι εφικτός και ο προσδιορισμός της ροής της θερμότητας σύμφωνα με τον νόμο Fourier (Bergman et al., 2011).

2.2.1 Εξίσωση Μονοδιάστατης Μετάδοσης Θερμότητας

2.2.1.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Για την κατάστρωση της εξίσωσης της θερμότητας, θεωρείται ο όγκος ελέγχου του Σχήματος 2.2.1, με εμβαδόν επιφάνειας κάθετης στη μετάδοση της θερμότητας, A , πυκνότητας ρ , και πάχους Δx .



Σχήμα 2.2.1: Όγκος ελέγχου για μονοδιάστατη ροή θερμότητας σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Kreith et al., 2010).

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, ισχύει:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας στο } x \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας } x + \Delta x \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός παραγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{μέσα στο στοιχείο} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της ενέργειας στο στοιχείο} \end{array} \right]$$

ή ως

$$q_x - q_{x+\Delta x} + \dot{E}_g = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (2.2.1)$$

Η μεταβολή της ενέργειας και ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στο στοιχείο εκφράζονται ως

$$\Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc_p(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c_p A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (2.2.2)$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}V = \dot{q}A\Delta x \quad (2.2.3)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.2.2), (2.2.3) στην (2.2.1) και διαιρώντας με το $A\Delta x$, προκύπτει:

$$-\frac{1}{A} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} + \dot{g} = \rho c_p \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.2.4)$$

Για τα όρια όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$ ισχύει:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.2.5)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (2.2.5) στην Εξ. (2.2.4) προκύπτει:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.2.6)$$

η οποία για σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k , γράφεται ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.2.7)$$

όπου $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ είναι ο συντελεστής θερμικής διαχυτότητας του υλικού.

Η Εξ. (2.2.7) κάτω από ορισμένες συνθήκες απλουστεύεται ως εξής:

1. Μόνιμη ροή θερμότητας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (2.2.8)$$

2. Μη μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\dot{g} = 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.9)$$

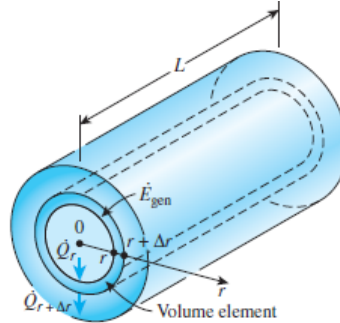
3. Μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ και $\dot{g} = 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2.10)$$

2.2.1.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Έστω κύλινδρος μεγάλου μήκους L , πυκνότητας ρ , και ειδικής θερμότητας c_p , και λεπτό κυλινδρικό κέλυφος πάχους Δr , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.2. Το εμβαδόν της επιφάνειας η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση μετάδοσης θερμότητας είναι $A = 2\pi rL$, με r την ακτίνα

στη θέση εκείνη. Το εμβαδόν πλέον δεν είναι σταθερό όπως στην περίπτωση των καρτεσιανών συντεταγμένων, αλλά εξαρτάται από την ακτίνα r του στοιχείου (Cengel, 2006).



Σχήμα 2.2.2: Μονοδιάστατη ροή θερμότητας σε κύλινδρο μεγάλου μήκους (Cengel and Ghajar, 2015).

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, ισχύει το εξής:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας στο } r \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας στο } r + \Delta r \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός παραγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{μέσα στο στοιχείο} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της ενέργειας στο στοιχείο} \end{array} \right]$$

ή

$$q_r - q_{r+\Delta r} + \dot{E}_g = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (2.2.11)$$

Η μεταβολή της ενέργειας και ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στο στοιχείο όγκου εκφράζονται ως

$$\Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc_p(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c_p A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (2.2.12)$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}V = \dot{q}A\Delta r \quad (2.2.13)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.2.12), (2.2.13) στην (2.2.11) και διαιρώντας με το $A\Delta r$, προκύπτει:

$$-\frac{1}{A} \frac{q_{r+\Delta r} - q_r}{\Delta r} + \dot{q} = \rho c_p \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.2.14)$$

Για τα όρια $\Delta r \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$ ισχύει:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{q_{r+\Delta r} - q_r}{\Delta r} = \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.2.15)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (2.2.15) στην Εξ. (2.2.14) προκύπτει:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial r} \left(kA \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.16)$$

η οποία για $A = 2\pi r$ και για σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k , γράφεται ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.17)$$

Η Εξ. (2.23) κάτω από ορισμένες συνθήκες απλουστεύεται ως εξής:

1. Μόνιμη ροή θερμότητας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (2.2.18)$$

2. Μη μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\dot{g} = 0$:

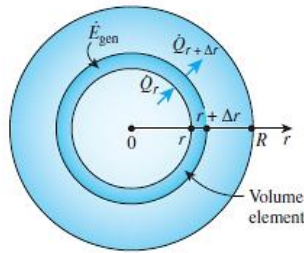
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.19)$$

3. Μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ και $\dot{g} = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.2.20)$$

2.2.1.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Έστω σφαίρα όπως στο Σχήμα 2.2.3, με πυκνότητα ρ , ειδική θερμότητα c_p , και εξωτερική ακτίνα R , και λεπτό σφαιρικό κέλυφος πάχους Δr . Το εμβαδό της επιφάνειας της σφαίρας, η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση μετάδοσης της θερμότητας, είναι $A = 4\pi r^2$, με r την ακτίνα σε αυτή τη θέση.



Σχήμα 2.2.3: Μονοδιάστατη ροή θερμότητας σε σφαίρα (Cengel and Ghajar, 2015).

Ο προσδιορισμός της εξίσωσης της θερμότητας προκύπτει με την ίδια μεθοδολογία όπως στις κυλινδρικές συντεταγμένες, με τη διαφορά ότι στην Εξ. (2.2.6) αντί για $A = 2\pi r$ γίνεται αντικατάσταση με το $A = 4\pi r^2$, και για σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k προκύπτει

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.21)$$

Η Εξ. (2.2.21) κάτω από ορισμένες συνθήκες απλουστεύεται ως εξής:

1. Μόνιμη ροή θερμότητας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (2.2.22)$$

2. Μη μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\dot{g} = 0$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.23)$$

3. Μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ και $\dot{g} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.2.24)$$

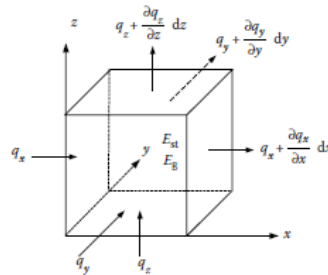
2.2.2 Γενική Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας με Αγωγή

Στην ενότητα 2.2.1, παρουσιάστηκε η διαδικασία εύρεσης της εξίσωσης της θερμότητας για μονοδιάστατη ροή. Δηλαδή, η μετάδοση σε δύο από τις τρεις διευθύνσεις θεωρήθηκε αμελητέα. Ωστόσο, σε πολλά προβλήματα πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν η ροή και στις υπόλοιπες διευθύνσεις. Στην παρούσα ενότητα θα καταστρωθεί η διαφορική εξίσωση της

θερμότητας για πολυδιάστατη ροή, σε καρτεσιανές, κυλινδρικές, και σφαιρικές συντεταγμένες.

2.2.2.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Ορίζεται ένας απειροστός όγκος με κυβικό σχήμα και διαστάσεις dx , dy , και dz , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.4. Θεωρείται πυκνότητα ρ , ειδική θερμότητα c_p , και όγκος $dV = dxdydz$. Η μεταφορά θερμότητας γίνεται κάθετα στις επιφάνειες των διευθύνσεων x , y , και z , και συμβολίζεται με q_x , q_y , και q_z αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2.4: Τριδιάστατη μεταφορά θερμότητας με αγωγή σε ορθογώνιο όγκο ελέγχου (Han, 2016).

Σύμφωνα με το ισοζύγιο ενέργειας, ισχύει το εξής:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας στο } x, y, \text{ και } z \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας στο } x + \Delta x \\ y + \Delta y \text{ και } z + \Delta z \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός παραγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{μέσα στο στοιχείο} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της ενέργειας στο στοιχείο} \end{array} \right]$$

ή

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+\Delta x} - q_{y+\Delta y} - q_{z+\Delta z} + \dot{E}_g = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (2.2.25)$$

Η μεταβολή της ενέργειας και ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στο στοιχείο όγκου εκφράζονται ως

$$\Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc_p(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c_p \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (2.2.26)$$

$$\dot{E}_g = \dot{g}V = \dot{g}\Delta x\Delta y\Delta z \quad (2.2.27)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.2.26), (2.2.27) στην (2.2.25) και διαιρώντας με το $\Delta x\Delta y\Delta z$, προκύπτει:

$$-\frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{q_{y+\Delta y} - q_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{q_{z+\Delta z} - q_z}{\Delta z} + \dot{g} = \rho c_p \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.2.28)$$

Σημειώνεται ότι οι επιφάνειες στις διευθύνσεις x , y , και z έχουν εμβαδό $A_x = \Delta y\Delta z$, $A_y = \Delta x\Delta z$, και $A_z = \Delta x\Delta y$, αντίστοιχα. Για τα όρια όταν $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0$, ισχύουν:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{\partial}{\partial x} \left(-k\Delta y\Delta z \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{q_{y+\Delta y} - q_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{\partial}{\partial y} \left(-k\Delta x\Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{q_{z+\Delta z} - q_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k\Delta x\Delta y \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Επομένως, η Εξ. (2.2.28) γράφεται ως

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.29)$$

και για σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.30)$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Fourier-Biot, και κάτω από ορισμένες συνθήκες απλουστεύεται ως εξής:

1. Μόνιμη ροή θερμότητας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (εξίσωση Poisson):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (2.2.31)$$

2. Μη μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\dot{g} = 0$ (εξίσωση διάχυσης):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.32)$$

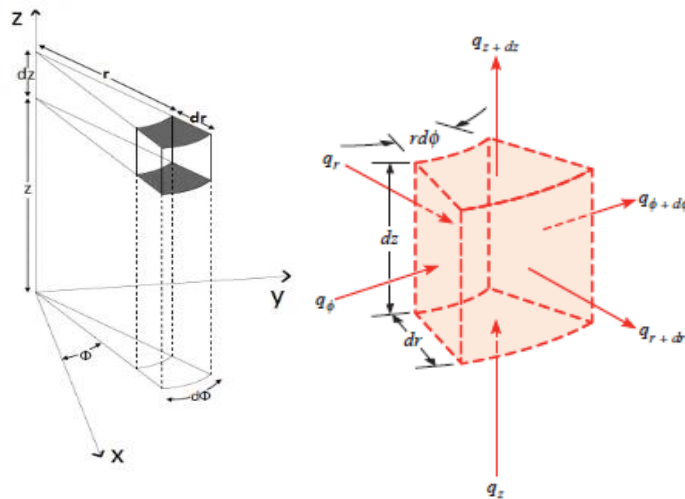
3. Μόνιμη ροή θερμότητας, χωρίς παραγωγή ενέργειας, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ και $\dot{g} = 0$ (εξίσωση Laplace):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2.33)$$

2.2.2.2 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της θερμότητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες, θεωρείται κύλινδρος ακτίνας r και έστω ένα απειροστό τμήμα του διαστάσεων dr , $r d\phi$ και dz , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.5. Οι μετασχηματισμοί που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z$$



Σχήμα 2.2.5: Απειροστό στοιχείο όγκου σε κυλινδρικές συντεταγμένες (Bergman et al., 2011, Learning, 2017).

Η εξίσωση μετάδοσης μπορεί πολύ εύκολα να προκύψει, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στις καρτεσιανές συντεταγμένες, με τη διαφορά ότι πλέον τα διανύσματα της ροής της θερμότητας δίνονται από την Εξ. (2.2.34):

$$q_r = -kA_r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\frac{k}{r}A_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad q_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.2.34)$$

με A_r , A_φ , και A_z τις επιφάνειες κάθετες στη ροή θερμότητας στις διευθύνσεις r , φ , και z .

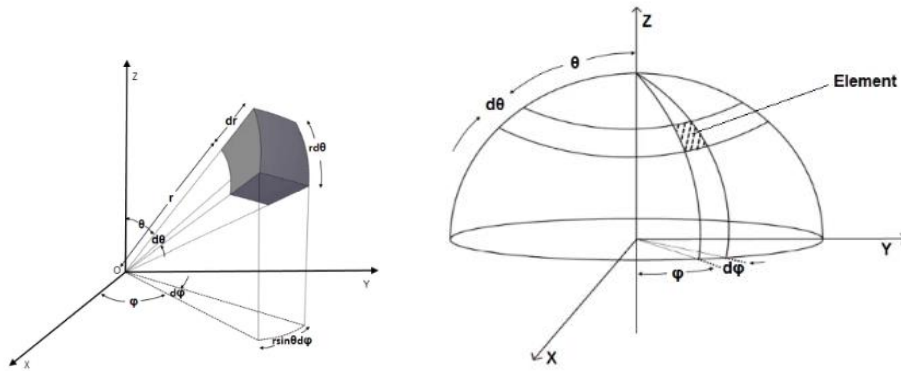
Τελικά η εξίσωση θερμότητας προκύπτει ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.35)$$

2.2.2.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Η εξίσωση της θερμότητας σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορεί να προσδιοριστεί θεωρώντας σφαίρα ακτίνας r και ένα απειροστό τμήμα της, διαστάσεων dr , $d\theta$, και $d\varphi$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.6. Οι μετασχηματισμοί που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις σφαιρικές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$



Σχήμα 2.2.6: Απειροστό στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες (Learning, 2017).

Η εξίσωση προκύπτει χρησιμοποιώντας το ισοζύγιο ενέργειας, με τη διαφορά ότι τα διανύσματα της ροής της θερμότητας δίνονται από την Εξ. (2.2.36):

$$q_r = -kA_r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta = -\frac{k}{r}A_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_\varphi = -\frac{k}{r \sin \theta}A_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (2.2.36)$$

με A_r , A_θ , και A_φ οι επιφάνειες κάθετες στη ροή θερμότητας στις διευθύνσεις r , θ , και φ .

Τελικά η εξίσωση θερμότητας προκύπτει ως

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.37)$$

2.3 Συνοριακές Συνθήκες

Στην ενότητα 2.2 αναπτύχθηκαν μέσω του ενεργειακού ισοζυγίου οι εξισώσεις μετάδοσης θερμότητας με αγωγή, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες, ανεξάρτητα από τις συνθήκες που επικρατούν στις επιφάνειες ενός μέσου. Ωστόσο, η θερμοκρασία καθώς και ο ρυθμός ροής θερμότητας εξαρτώνται πλήρως από τις συνθήκες αυτές. Επομένως, για να γίνει η περιγραφή ενός προβλήματος μετάδοσης θερμότητας είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν και οι συνθήκες αυτές. Οι θερμικές συνθήκες οι οποίες επικρατούν στις συνοριακές επιφάνειες ενός μέσου, ονομάζονται συνοριακές συνθήκες (Cengel, 2015).

Γενικότερα, η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης καταλήγει σε μια γενική λύση, η οποία περιλαμβάνει αυθαίρετες σταθερές, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένας άπειρος αριθμός λύσεων. Για την απόκτηση λοιπόν μίας και μοναδικής λύσης (ώστε το πρόβλημα να είναι ικανώς τοποθετημένο), ορίζονται κάποιες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες ικανοποιούνται από τη γενική λύση της εξίσωσης, με τις τιμές των αυθαίρετων σταθερών που θα προκύψουν να είναι μοναδικές. Ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών που απαιτούνται για την περιγραφή ενός προβλήματος, εξαρτάται ουσιαστικά από τον αριθμό των διευθύνσεων του συστήματος συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, ορίζονται για κάθε διεύθυνση δύο συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα σε ένα διδιάστο ή τριδιάστατο πρόβλημα, ορίζονται τέσσερις ή έξι συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα. Ο αριθμός αυτός προκύπτει από την γενική εξίσωση της θερμότητας, η οποία περιλαμβάνει παραγώγους δεύτερης τάξης σε κάθε διεύθυνση. Επομένως οι αυθαίρετες σταθερές που θα προκύψουν και θα πρέπει να προσδιοριστούν, θα είναι δύο για κάθε διεύθυνση. Επιπλέον, εκτός από τις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες περιγράφουν τη θερμοκρασία ή τον ρυθμό ροής της θερμότητας στις επιφάνειες ενός μέσου, επιβάλλεται και η αρχική συνθήκη, η οποία καθορίζει την θερμοκρασιακή κατανομή σε χρόνο $t = 0$ (Cengel, 2015, Hahn & Özisik, 2012).

Η γενική μορφή της αρχικής συνθήκης για καρτεσιανές συντεταγμένες είναι η εξής:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

με $f(x, y, z)$ την αρχική θερμοκρασιακή κατανομή, ενώ για ομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασίας ισχύει:

$$T(x, y, z, 0) = T_i.$$

Οι συνοριακές συνθήκες που συναντώνται πιο συχνά σε προβλήματα μετάδοσης θερμότητας είναι οι εξής (Taler & Duda, 2006, Wang et al., 2008, Wendl, 2012):

1. Καθορισμένη Θερμοκρασία / Συνοριακή Συνθήκη Dirichlet

Αυτού του είδους οι συνοριακές συνθήκες περιγράφουν τη θερμοκρασιακή κατανομή της συνοριακής επιφάνειας S ενός σώματος. Εκφράζονται ως

$$T(r, t)|_S = T_S(r_S, t) \quad (2.3.1)$$

ή

$$T(r, t)|_S = T_0 \quad (2.3.2)$$

όπου r το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της επιφάνειας, $T_S(r_S, t)$ η κατανομή της θερμοκρασίας στην επιφάνεια, και T_0 η σταθερή θερμοκρασία.

Εάν η θερμοκρασία της επιφάνειας είναι μηδενική, τότε ισχύει:

$$T(r, t)|_S = 0 \quad (2.3.3)$$

Η Εξ.(2.3.3) ονομάζεται ομογενής συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

2. Καθορισμένος Ρυθμός Ροής Θερμότητας / Συνοριακή Συνθήκη Neumann

Σε αυτή την περίπτωση περιγράφεται ο ρυθμός ροής θερμότητας της επιφάνειας του σώματος, και γράφεται ως

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_S(r_S, t) \quad (2.3.4)$$

ή

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_0 \quad (2.3.5)$$

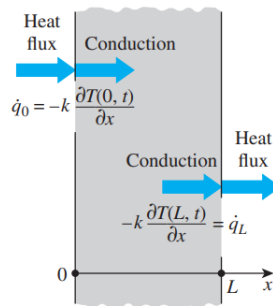
όπου $q_S(r_S, t)$ η κατανομή του ρυθμού ροής της θερμότητας στην επιφάνεια, και q_0 σταθερή τιμή του ρυθμού ροής.

Εάν η ροή θερμότητας είναι μηδενική, τότε:

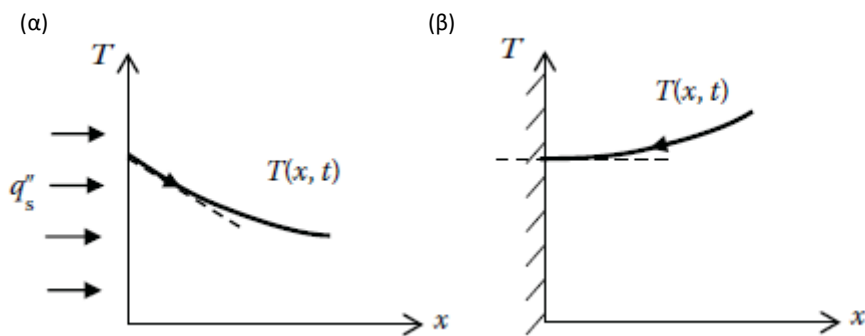
$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (2.3.6)$$

Η Εξ. (2.3.6) ονομάζεται ομογενής συνοριακή συνθήκη Neumann, και υποδηλώνει πως το σώμα είναι μονωμένο, ή αδιαβατικό.

Στο Σχήμα 2.3.1 παρουσιάζεται με τη θετική φορά η ροή της θερμότητας στις επιφάνειες ενός τοιχώματος, ενώ στο Σχήμα 2.3.2 παρουσιάζεται το προφίλ της θερμοκρασίας σε επιφάνεια με ροή θερμότητας και σε αδιαβατική επιφάνεια.



Σχήμα 2.3.1: Ρυθμός ροής θερμότητας δια μέσου ενός τοιχώματος (Cengel and Ghajar, 2015).



Σχήμα 2.3.2: α) επιφάνεια με ροή θερμότητας, και β) αδιαβατική επιφάνεια (Han, 2016).

3. Συνοριακή Συνθήκη Συναγωγής

Η συνθήκη αυτή εμφανίζεται σε μέσα των οποίων οι επιφάνειες είναι εκτεθειμένες σε περιβάλλον που βρίσκεται σε συγκεκριμένη θερμοκρασία. Εκφράζεται ως

(Αγωγή θερμότητας σε επιφάνεια) = (Συναγωγή θερμότητας σε επιφάνεια)

ή

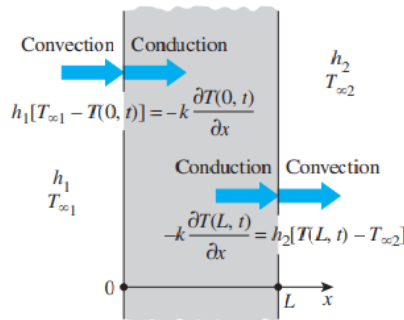
$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h[T_S - T_\infty], \quad (2.3.7)$$

όπου T_s η θερμοκρασία της επιφάνειας, T_∞ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσου, η οποία εξαρτάται και αυτή από τη θέση και τον χρόνο, και h ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή.

Εάν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος ρευστού είναι μηδέν, $T_\infty = 0$, τότε:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = hT_s \quad (2.3.8)$$

Η Εξ. (2.3.8) ονομάζεται ομογενής συνοριακή συνθήκη συναγωγής. Στο Σχήμα 2.3.3 παρουσιάζεται η συνθήκη αυτή στις επιφάνειες ενός τοιχώματος.



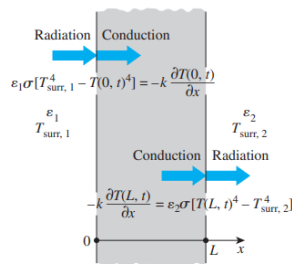
Σχήμα 2.3.3: Μετάδοση θερμότητας με συναγωγή από (και προς) το περιβάλλον προς το τοίχωμα (Cengel and Ghajar, 2015).

4. Ακτινοβολία/Μη γραμμική συνοριακή συνθήκη

Στην περίπτωση που το περιβάλλον στο οποίο είναι εκτεθειμένες οι επιφάνειες του μέσου είναι το κενό, τότε η θερμότητα μεταδίδεται μέσω της ακτινοβολίας. Εκφράζεται ως

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \sigma [T_s^4 - T_r^4], \quad (2.3.9)$$

όπου T_s η θερμοκρασία της επιφάνειας, T_r η θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσου, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ η σταθερά Stefan-Boltzmann, και ε ένας συντελεστής σχήματος ο οποίος δηλώνει την ικανότητα εκπομπής της επιφάνειας. Σε ένα τοίχωμα πάχους L , η θερμότητα μεταδίδεται από το περιβάλλον προς την επιφάνεια, στη θέση $x = 0$, με ακτινοβολία, και με αγωγή προς την επιφάνεια στη θέση $x = L$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3.4. Στον Πίνακα 2.3.1., παρατίθενται διάφορα είδη υλικών και οι αντίστοιχες τιμές του ε .



Σχήμα 2.3.4: Μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία από (ή προς) το περιβάλλον προς (ή από) το τοίχωμα (Cengel and Ghajar, 2015).

Πίνακας 2.3.1: Τυπικές τιμές του ε για διάφορα υλικά (Lienhard, 2019).

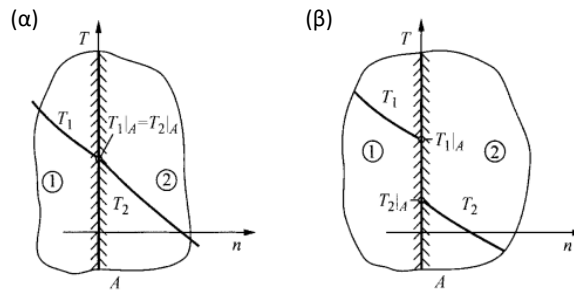
Metals			Nonmetals		
Surface	Temp. (°C)	ε	Surface	Temp. (°C)	ε
Aluminum			Asbestos	40	0.93–0.97
Polished, 98% pure	200–600	0.04–0.06	Brick		
Commercial sheet	90	0.09	Red, rough	40	0.93
Heavily oxidized	90–540	0.20–0.33	Silica	980	0.80–0.85
Brass			Fireclay	980	0.75
Highly polished	260	0.03	Ordinary refractory	1090	0.59
Dull plate	40–260	0.22	Magnesite refractory	980	0.38
Oxidized	40–260	0.46–0.56	White refractory	1090	0.29
Copper			Carbon		
Highly polished electrolytic	90	0.02	Filament	1040–1430	0.53
Slightly polished to dull	40	0.12–0.15	Lampsoot	40	0.95
Black oxidized	40	0.76	Concrete, rough	40	0.94
Gold: pure, polished	90–600	0.02–0.035	Glass		
Iron and steel			Smooth	40	0.94
Mild steel, polished	150–480	0.14–0.32	Quartz glass (2 mm)	260–540	0.96–0.66
Steel, polished	40–260	0.07–0.10	Pyrex	260–540	0.94–0.74
Sheet steel, rolled	40	0.66	Gypsum	40	0.80–0.90
Sheet steel, strong rough oxide	40	0.80	Ice	0	0.97–0.98
Cast iron, oxidized	40–260	0.57–0.66	Limestone	400–260	0.95–0.83
Iron, rusted	40	0.61–0.85	Marble	40	0.93–0.95
Stainless, polished	40	0.07–0.17	Black gloss	40	0.90
Stainless, after repeated heating	230–900	0.50–0.70	White paint	40	0.89–0.97
Wrought iron, smooth	40	0.35	Lacquer	40	0.80–0.95
Wrought iron, dull oxidized	20–360	0.94	Mica	40	0.75
Lead			Paints		
Polished	40–260	0.05–0.08	Various oil paints	40	0.92–0.96
Oxidized	40–200	0.63	Red lead	90	0.93
Mercury: pure, clean	40–90	0.10–0.12	Paper		
Platinum			White	40	0.95–0.98
Pure, polished plate	200–590	0.05–0.10	Other colors	40	0.92–0.94
Oxidized at 590°C	260–590	0.07–0.11	Roofing	40	0.91
Drawn wire and strips	40–1370	0.04–0.19	Plaster, rough lime	40–260	0.92
Silver	200	0.01–0.04	Quartz	100–1000	0.89–0.58
Tin	40–90	0.05	Rubber	40	0.86–0.94
Tungsten			Snow	10–20	0.82
Filament	540–1090	0.11–0.16	Water, thickness ≥ 0.1 mm	40	0.96
Filament	2760	0.39	Wood	40	0.80–0.90
			Oak, planed	20	0.90

5. Συνοριακή Συνθήκη Διεπαφής

Αυτού του είδους η συνοριακή συνθήκη επιβάλλεται στην περίπτωση που έρχονται σε επαφή δύο ή περισσότερες επιφάνειες. Τα σημεία της επαφής ορίζουν την επιφάνεια διεπαφής. Στην ιδεατή επαφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3.5 α), οι θερμοκρασίες των επιφανειών καθώς και ο ρυθμός ροής της θερμότητας μεταξύ των επιφανειών, είναι ίσες. Ισχύουν δηλαδή οι παρακάτω εξισώσεις:

$$T_{1s} = T_{2s} \quad (2.3.10\alpha)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \quad (2.3.10\beta)$$



Σχήμα 2.3.5: α) Ιδεατή επαφή δύο σωμάτων, β) πτώση θερμοκρασίας λόγω αντίστασης επαφής (Taler & Duda, 2006).

Στην πραγματικότητα, όμως, η θερμική επαφή μεταξύ των επιφανειών δεν είναι τέλεια, με αποτέλεσμα να υπάρχει μια σημαντική πτώση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια επαφής, η οποία παρουσιάζεται στο προφίλ του Σχήματος 2.3.5 β). Επομένως, οι θερμοκρασίες των επιφανειών στο σημείο της επαφής, δεν είναι ίσες. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται ως

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = h_c (T_1 - T_2) = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \quad (2.3.11)$$

όπου h_c η αγωγιμότητα επαφής, με μονάδα μέτρησης το W/m^2K , η οποία είναι χαρακτηριστικό της θερμικής αντίστασης και εξαρτάται από την τραχύτητα των επιφανειών. Εάν $h_c \rightarrow \infty$, τότε η Εξ. (2.3.11), μετατρέπεται στην Εξ. (2.3.10). Στον Πίνακα 2.3.2, παρουσιάζονται κάποιες αντιπροσωπευτικές τιμές του h_c , για διάφορες διεπιφάνειες.

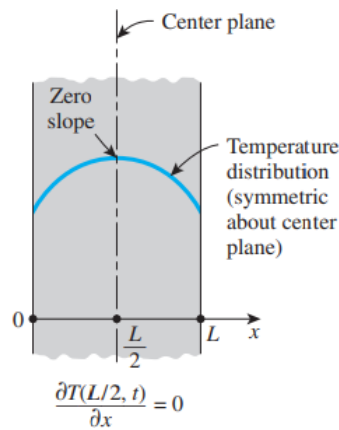
Πίνακας 2.3.2: Τιμές του h_c για διάφορα υλικά επιφανειών (Hahn & Özisik, 2012).

Interface	Contact Pressure, atm	Interfacial Fluid	h_c , W/(m ² · K)
Stainless steel to stainless steel [10] (0.76 μm roughness)	10	Air	9,000–11,500
	20	Air	10,000–12,000
Stainless steel to stainless steel [10] (2.5 μm roughness)	10	Air	2,800–4,000
	20	Air	3,100–4,200
Aluminum to aluminum [10] (3 μm roughness)	10	Air	6,000–15,000
	20	Air	10,500–28,000
Stainless steel to stainless steel [13]	1	Vacuum	400–1,600
	100	Vacuum	2,500–14,000
Copper to copper [13]	1	Vacuum	1,000–10,000
	100	Vacuum	20,000–100,000
Aluminum to aluminum [13]	1	Vacuum	2,000–6,600
	100	Vacuum	25,000–50,000
Aluminum to aluminum [13] (10 μm roughness)	1	Air	3,600
	1	Helium	10,000
	1	Silicone oil	19,000
Aluminum to aluminum [13, 14]	1	Dow Corning 340 grease	140,000
		Dow Corning 340 grease	250,000

6. Θερμική Συμμετρία

Στις επιφάνειες ενός μέσου, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται μπορεί να είναι οι ίδιες. Σε αυτή την περίπτωση, το προφίλ της θερμοκρασιακής κατανομής εμφανίζει μια συμμετρία, όπως φαίνεται στο τοίχωμα του σχήματος 2.3.6. Στο επίπεδο της συμμετρίας δεν λαμβάνει χώρα ροή θερμότητας, εφόσον η κλίση της ευθείας στο σημείο συμμετρίας είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (2.3.12)$$



Σχήμα 2.3.6: Προφίλ συμμετρικής θερμοκρασιακής κατανομής σε τοίχωμα (Cengel and Ghajar, 2015).

Η επίλυση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους όπως με τη μέθοδο Lagrange, την ολοκληρωτική μέθοδο, τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, τη μέθοδο της θερμικής αντίστασης, τη μέθοδο Duhamel, και πολλές άλλες. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας εξετάζεται σε επόμενα κεφάλαια η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών, για την επίλυση γεωμετριών σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες, σε μία ή περισσότερες διαστάσεις. Η μέθοδος αυτή, περιλαμβάνει την επίλυση διαφορικών εξισώσεων και έχει ευρύ πεδίο εφαρμογών. Γίνεται επίσης αναφορά σε ορισμένες μεθόδους οι οποίες, ενώ δεν περιλαμβάνουν διαφορικές εξισώσεις, για απλά είδη προβλημάτων η χρήση τους θεωρείται γρήγορη και εύκολη.

Κεφάλαιο 3 Μόνιμη Μετάδοση Θερμότητας

Η μετάδοση θερμότητας σε ένα υλικό μέσο με σταθερές συνοριακές συνθήκες στις επιφάνειές του, δηλαδή σταθερή θερμοκρασία ή ροή θερμότητας, θεωρείται μόνιμη. Το παρόν κεφάλαιο επικεντρώνεται στην επίλυση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Συγκεκριμένα, εξετάζονται γεωμετρίες στο καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, για μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη ροή θερμότητας. Στη συνέχεια, αναφέρεται και η μέθοδος της θερμικής αντίστασης για μονοδιάστατη ροή, η οποία είναι απλούστερη, καθώς δεν περιλαμβάνει διαφορικές εξισώσεις, με τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων να θεωρείται ανάλογος με αυτόν των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

3.1 Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών

Το πρόβλημα της μόνιμης μετάδοσης θερμότητας για μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη ροή, μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε μερικές διαφορικές εξισώσεις. Για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με χρήση αυτής της μεθόδου είναι σημαντικό να ικανοποιούνται ορισμένες απαιτήσεις.

Ειδικότερα, η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών εφαρμόζεται σε ομογενή προβλήματα μετάδοσης θερμότητας, δηλαδή προβλήματα των οποίων οι εξισώσεις αποτελούνται μόνο από όρους που περιέχουν την εξαρτημένη μεταβλητή ή παραγώγους της. Συγκεκριμένα, στη μόνιμη μετάδοση θερμότητας, εκτός από την ομογενή εξίσωση πρέπει να είναι ομογενείς και οι συνοριακές συνθήκες, ενώ μία μόνο συνοριακή συνθήκη μπορεί να είναι μη ομογενής. Αντίστοιχα, στη μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας απαιτείται όλες οι συνοριακές συνθήκες να είναι ομογενείς εκτός από την αρχική συνθήκη, η οποία είναι μη

ομογενής. Προβλήματα μη μόνιμης μετάδοσης θερμότητας θα μελετηθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Στη συνέχεια, περιγράφεται η διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων μόνιμης μετάδοσης θερμότητας, σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

3.1.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Κάθε πρόβλημα αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στα σύνορα του μέσου. Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα μονοδιάστατης ροής σε καρτεσιανές συντεταγμένες, για παράδειγμα σε ένα τοίχωμα μεγάλου μήκους, είναι:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (3.1.1)$$

η οποία είναι ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Για την εύρεση της γενικής λύσης της Εξ. (3.1.1), αρκεί να πραγματοποιηθούν δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, από τις οποίες προκύπτει:

$$T(x) = A_1x + A_2 \quad (3.1.2)$$

όπου A_1 και A_2 , οι σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες υπολογίζονται στη συνέχεια με την εφαρμογή δύο συνοριακών συνθηκών στη λύση (3.1.1).

Διδιάστατα Προβλήματα

Πλάκα με $T = T(x, y)$

Για την επίλυση διδιάστατων προβλημάτων στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα μελετηθεί ως παράδειγμα μια λεπτή πλάκα όπως στο Σχήμα 3.1.1, μήκους $x = L$ και πλάτους $y = b$. Η εξίσωση Laplace και οι συνοριακές συνθήκες των επιφανειών γράφονται ως

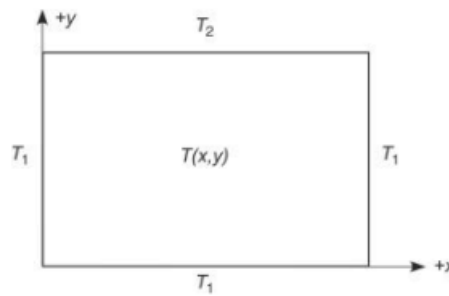
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$T(x = 0, y) = T_1 \quad (3.1.4\alpha)$$

$$T(x, y = 0) = T_1 \quad (3.1.4\beta)$$

$$T(x = L, y) = T_1 \quad (3.1.4\gamma)$$

$$T(x, y = b) = T_2 \quad (3.1.4\delta)$$

Σχήμα 3.1.1: Πλάκα μήκους L , πάχους b (Hahn & Özisik, 2012).

Παρατηρείται ότι παρόλο που η Εξ. (3.1.3) είναι ομογενής (Εξ. Laplace), οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (3.1.4α), (3.1.4β), (3.1.4γ), και (3.1.4δ), είναι μη ομογενείς. Έτσι, δεν ικανοποιείται η απαίτηση για ομογενείς συνοριακές συνθήκες σύμφωνα με την οποία μόνο μία από αυτές να είναι μη ομογενής, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Το πρόβλημα της μη ομογένειας μπορεί να αντιμετωπιστεί ορίζοντας μια νέα μεταβλητή:

$$\theta(x, y) = T(x, y) - T_1, \quad (3.1.5)$$

η οποία μηδενίζει τρεις από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες. Έχοντας λοιπόν ως νέα εξαρτημένη μεταβλητή τη $\theta(x, y)$, το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\theta(x = 0, y) = T(x, y) - T_1 = T_1 - T_1 = 0 \quad (3.1.7\alpha)$$

$$\theta(x, y = 0) = T(x, y) - T_1 = T_1 - T_1 = 0 \quad (3.1.7\beta)$$

$$\theta(x = L, y) = T(x, y) - T_1 = T_1 - T_1 = 0 \quad (3.1.7\gamma)$$

$$\theta(x, y = b) = T(x, y) - T_2 = T_1 - T_2 = T_3 \quad (3.1.7\delta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (3.1.7α), (3.1.7β) και (3.1.7γ) υποδηλώνουν πως τρεις πλευρές της πλάκας έχουν μηδενική, ενώ η τέταρτη έχει σταθερή μη μηδενική τιμή θερμοκρασίας.

Αρχικά, γίνεται η υπόθεση ότι η λύση της Εξ. (3.1.6), $\theta(x, y)$, είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων X και Y , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x και y , αντίστοιχα.

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.1.8)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (3.1.8) στην (3.1.6), προκύπτει:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (3.1.9)$$

ή

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2, \quad (3.1.10)$$

με λ^2 τη σταθερά διαχωρισμού. Άρα προκύπτουν δύο ομογενείς, γραμμικές, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (3.1.12)$$

με τις γενικές τους λύσεις:

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (3.1.13)$$

$$Y(y) = A_3 e^{-\lambda y} + A_4 e^{\lambda y} \quad (3.1.14)$$

όπου A_1, A_2, A_3 , και A_4 , σταθερές οι οποίες θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες. Με αντικατάσταση των (3.1.13) και (3.1.14) στην Εξ. (3.1.8), η γενική λύση γράφεται ως

$$\theta = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x)(A_3 e^{-\lambda y} + A_4 e^{\lambda y}) \quad (3.1.15)$$

Αντικαθιστώντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.7α) στην Εξ. (3.1.15), προκύπτει:

$$A_1(A_3 e^{-\lambda y} + A_4 e^{\lambda y}) = 0$$

Από τη συνθήκη (3.1.7β), προκύπτει:

$$(A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x)(A_3 + A_4) = 0,$$

ενώ από τη συνοριακή συνθήκη (3.1.7γ):

$$(A_1 \cos \lambda L + A_2 \sin \lambda L)(A_3 e^{-\lambda y} + A_4 e^{\lambda y}) = 0$$

Προκειμένου να ικανοποιείται η πρώτη συνοριακή συνθήκη (3.1.7α) θα πρέπει $A_1 = 0$, ενώ για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη θα πρέπει $A_3 + A_4 = 0$ ή $A_3 = -A_4$. Εφαρμόζοντας αυτά τα αποτελέσματα στη σχέση που προκύπτει από τη συνοριακή συνθήκη (3.1.7γ), έχουμε:

$$(A_2 \sin \lambda L)(A_3 e^{-\lambda y} - A_4 e^{\lambda y}) = 0$$

Από τον ορισμό του υπερβολικού ημιτόνου $\sinh hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$2A_2 A_3 \sin \lambda L \sinh \lambda y = 0 \quad (3.1.16)$$

η οποία ικανοποιείται για $\sin \lambda L = 0$ ή $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, με $n = 1, 2, 3, \dots$

Για κάθε ακέραιο n διάφορο του μηδενός, προκύπτει μια διαφορετική λύση. Αθροίζοντας αυτές τις λύσεις προκύπτει η Εξ. (3.1.17):

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (3.1.17)$$

Τέλος, θα πρέπει να ικανοποιείται η τελευταία μη ομογενής συνοριακή συνθήκη, στο $y = b$, από την οποία θα υπολογιστεί ο συντελεστής A_n . Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.7δ) στην Εξ. (3.1.17), έχουμε:

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi b}{L} = T_3 \quad (3.1.18)$$

Η τριγωνομετρική συνάρτηση $\sin \frac{n\pi x}{L}$ είναι ορθογώνια, επομένως θεωρώντας μια σταθερά $b_n = A_n \sinh \frac{n\pi b}{L}$, η Εξ. (3.1.18) γράφεται ως

$$T_3 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.1.19)$$

Ακολουθεί ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών της Εξ. (3.1.19) επί μια ορθογωνική συνάρτηση $\sin \lambda_m x$, με τυχαία ιδιοτιμή $\lambda_m = \frac{m\pi x}{L}$, και στη συνέχεια η ολοκλήρωση από 0 έως L , ως εξής:

$$\int_0^L T_3 \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \quad (3.1.20)$$

Το δεύτερο μέλος της Εξ. (3.1.20), λόγω της ιδιότητας της ορθογωνιότητας, είναι μη μηδενικό μόνο στην περίπτωση που $n = m$. Τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\int_0^L T_3 \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m \int_0^L \sin^2 \frac{m\pi x}{L} dx = b_m N(\lambda_m), \quad (3.1.21)$$

όπου $N(\lambda_m)$ η νόρμα της ιδιοσυνάρτησης $\sin \lambda_m x$. Λύνοντας ως προς b_m για $m = n$ και αντικαθιστώντας το με $b_n = A_n \sinh \frac{n\pi b}{L}$, ο συντελεστής A_n προκύπτει ως

$$A_n = \frac{T_3 \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\sinh \frac{n\pi b}{L} N(\lambda_m)} \quad (3.1.22)$$

Η λύση της εξίσωσης, $\theta(x, y)$ προκύπτει με αντικατάσταση της Εξ. (3.1.22) στην (3.1.17) ως

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_3 \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\sinh \frac{n\pi b}{L} N(\lambda_m)} \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (3.1.23)$$

με το άθροισμα να ξεκινάει από $n = 1$, καθώς για $n = 0$ η προκύπτουσα λύση είναι η τετριμμένη λύση $\theta(x, y) = 0$.

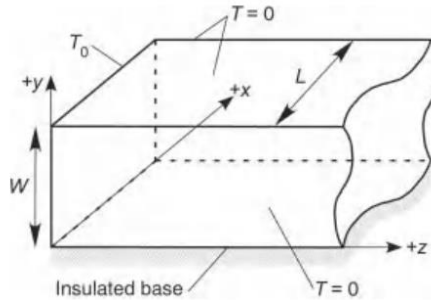
Τελικά η ζητούμενη λύση $T(x, y)$, δίνεται από την Εξ. (3.1.5) ως

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_3 \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\sinh \frac{n\pi b}{L} N(\lambda_m)} \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} + T_1 \quad (3.1.24)$$

Τριδιάστατα Προβλήματα

Πλάκα με $T(x, y, z)$

Για την επίλυση τριδιάστατων προβλημάτων σε καρτεσιανές συντεταγμένες θεωρείται ένα ημι-άπειρο στερεό, διαστάσεων $L \times W$, με σταθερή θερμοκρασία T_0 στην αριστερή επιφάνεια $z = 0$, μονωμένη βάση στο $y = 0$, ενώ οι υπόλοιπες επιφάνειες διατηρούνται σε θερμοκρασία $T = 0$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1.2.



Σχήμα 3.1.2: Ημι-άπειρο τριδιάστατο στερεό σε καρτεσιανές συντεταγμένες (Hahn & Özisik, 2012).

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από την ομογενή διαφορική Εξ. (3.1.25) (εξίσωση Laplace) και τις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες ορίζονται από τις Εξ. (3.1.26α), (3.1.26β), (3.1.26γ) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.25)$$

$$T(x = 0, y, z) = 0, \quad T(x = L, y, z) = 0 \quad (3.1.26\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad T(x, y = W, z) = 0 \quad (3.1.26\beta)$$

$$T(x, y, z = 0) = T_0, \quad T(x, y, z \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.1.26\gamma)$$

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελείται από πέντε ομογενείς συνοριακές συνθήκες και μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη. Επομένως είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Η γενική λύση $T(x, y, z)$ μπορεί να εκφραστεί από την Εξ. (3.1.27) ως γινόμενο τριών εξαρτημένων μεταβλητών X, Y, Z , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή x, y , και z , αντίστοιχα:

$$T(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.1.27)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (3.1.27) στην (3.1.25), προκύπτει:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.28)$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης διαχωρίζεται μία από τις τρεις μεταβλητές, έστω η $X(x)$. Επομένως προκύπτει η Εξ. (3.1.29) ως

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda^2 \quad (3.1.29)$$

όπου λ^2 μια σταθερά διαχωρισμού. Η διεύθυνση x ορίζεται από το πρόβλημα που περιλαμβάνει την Εξ. (3.1.30α) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.30β):

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\lambda^2 = 0 \quad (3.1.30\alpha)$$

$$X(x=0) = 0, \quad X(x=L) = 0 \quad (3.1.30\beta)$$

Η Εξ. (3.1.30α) είναι μια συνήθης, ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (3.1.31):

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (3.1.31)$$

Από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης στο $x = 0$ προκύπτει:

$$X = 0 \Rightarrow A_1 \cos \lambda \cdot 0 + A_2 \sin \lambda \cdot 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

ενώ από τη συνοριακή συνθήκη στο $x = L$, προκύπτει:

$$X = 0 \Rightarrow A_2 \sin \lambda L = 0$$

Ο συντελεστής A_2 θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός προκειμένου να μην έχουμε τετριμμένη λύση $X = 0$, επομένως ο όρος του ημιτόνου πρέπει να τεθεί ίσος με το μηδέν, ως εξής:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \sin \lambda_n L = \sin n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad (3.1.32)$$

όπου λ_n οι ιδιοτιμές. Η ιδιοτιμή $\lambda = 0$ είναι η τετριμμένη ιδιοτιμή από την οποία προκύπτει η τετριμμένη λύση $X = 0$.

Η λύση της Εξ. (3.1.30α) μπορεί να γραφεί με τη μορφή των ορθογώνιων συναρτήσεων ως

$$X_n(x) = A_2 \sin \lambda_n x \quad (3.1.33)$$

Για την εύρεση των εξισώσεων στις υπόλοιπες διευθύνσεις γίνεται διαχωρισμός των μεταβλητών $Y(y)$ και $Z(z)$, και προκύπτει η Εξ. (3.1.34):

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2 \quad (3.1.34)$$

όπου β^2 μια σταθερά διαχωρισμού. Το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας στη διεύθυνση y δίνεται από την Εξ. (3.1.35α) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.35.β) ως

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\beta^2 = 0 \quad (3.1.35\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad Y(y=W) = 0 \quad (3.1.35\beta)$$

Η Εξ. (3.1.35α) είναι μια συνήθης, ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (3.1.36):

$$Y(y) = A_3 \cos \beta y + A_4 \sin \beta y \quad (3.1.36)$$

Από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης στο $y = 0$, προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow -\beta A_3 \sin \beta \cdot 0 + \beta A_4 \cos \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_4 = 0$$

με αποτέλεσμα να μηδενίζεται ο όρος του ημιτόνου της Εξ. (3.1.36).

Από τη συνοριακή συνθήκη στο $y = W$, προκύπτει:

$$Y = 0 \Rightarrow A_3 \cos \beta W = 0$$

Ο συντελεστής A_3 θα πρέπει είναι διάφορος του μηδενός, επομένως ο όρος του συνημίτονου πρέπει να τεθεί ίσος με το μηδέν, και έχουμε:

$$\cos \beta W = 0 \Rightarrow \cos \beta_m W = \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} \Rightarrow \beta_m = \frac{(2m+1)\pi}{2W} \text{ με } m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.37)$$

όπου β_m οι ιδιοτιμές. Η λύση της Εξ. (3.1.36) μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή ορθογώνιων ιδιοσυναρτήσεων με την Εξ. (3.1.38) ως

$$Y_m(y) = A_3 \cos \beta_m y \quad (3.1.38)$$

Τέλος, το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας στη διεύθυνση z περιγράφεται από την Εξ. (3.1.39α) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.39β):

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - (\lambda_n^2 + \beta_m^2)Z = 0 \quad (3.1.39\alpha)$$

$$Z(z=0) = T_0, \quad Z(z \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.1.39\beta)$$

Οι σταθερές λ_n και β_m έχουν προσδιοριστεί από τις Εξ. (3.1.32) και (3.1.37), άρα η σχέση $\lambda_n^2 + \beta_m^2$ μπορεί να αντικατασταθεί από μια νέα παράμετρο μ_{nm}^2 . Επομένως η Εξ. (3.1.39α) μετατρέπεται στην (3.1.39γ):

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \mu_{nm}^2 Z = 0 \quad (3.1.39\gamma)$$

Η Εξ. (3.1.39γ) είναι μια συνήθης, ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και η γενική της λύση δίνεται από την Εξ. (3.1.40) ως

$$Z(z) = A_5 e^{\mu_{nm} z} + A_6 e^{-\mu_{nm} z} \quad (3.1.40)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη για $z \rightarrow \infty$, προκύπτει:

$$Z(z \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow A_5 e^{\infty} + A_6 e^{-\infty} = 0 \Rightarrow A_5 = 0$$

Επομένως η Εξ. (3.1.40) μετατρέπεται στην (3.1.41):

$$Z_{nm}(z) = A_6 e^{-\mu_{nm} z} \quad (3.1.41)$$

Με όλες τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες να ικανοποιούνται, η Εξ. (3.1.27) προκύπτει από το γινόμενο των λύσεων (3.1.33), (3.1.38) και (3.1.41), και εκφράζεται από την Εξ. (3.1.42) ως

$$T_{nm}(x, y, z) = A_{nm} \sin \lambda_n x \sin \beta_m y e^{-\mu_{nm} z} \quad (3.1.42)$$

όπου $A_{nm} = A_2 A_3 A_6$ μια σταθερά. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των μη μηδενικών λύσεων:

$$T(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin \lambda_n x \cos \beta_m y e^{-\mu_{nm} z} \quad (3.1.43)$$

Για τον προσδιορισμό της σταθεράς A_{mn} θα χρησιμοποιηθεί η τελευταία μη ομογενής συνοριακή συνθήκη στο $z = 0$. Με αντικατάσταση της συνθήκης (3.1.26γ) στην Εξ. (3.1.43) προκύπτει:

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin \lambda_n x \cos \beta_m y \quad (3.1.44)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, πολλαπλασιάζονται και τα δύο μέλη της Εξ. (3.1.44) επί τις ορθογώνιες συναρτήσεις $\sin \lambda_u x$ και $\cos \beta_v y$ και στη συνέχεια ολοκληρώνονται από $x = 0$ έως $x = L$, και από $y = 0$ έως $y = W$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^L \int_{y=0}^W T_0 \sin \lambda_u x \cos \beta_v y dy dx = \\ \int_{x=0}^L \int_{y=0}^W \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin \lambda_n x \sin \lambda_u x \cos \beta_m y \cos \beta_v y dy dx \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Το δεύτερο μέλος της Εξ. (3.1.45) είναι μη μηδενικό μόνο όταν $n = u$ και $m = v$. Προκύπτει λοιπόν η Εξ. (3.1.46) ως

$$\int_{x=0}^L \int_{y=0}^W T_0 \sin \lambda_n x \cos \beta_m y dy dx = A_{mn} \int_{x=0}^L \sin^2 \lambda_n x dx \int_{y=0}^W \cos^2 \beta_m y dy \quad (3.1.46)$$

Το πρώτο μέλος της Εξ. (3.1.46) επιλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bullet \int_{x=0}^L \int_{y=0}^W T_0 \sin \lambda_n x \cos \beta_m y dy dx &= \int_{x=0}^L T_0 \sin \lambda_n x \left[\frac{\sin \beta_m y}{\beta_m} \right]_0^W dx \\ &\Rightarrow T_0 \frac{\sin \beta_m W}{\beta_m} \int_{x=0}^L \sin \lambda_n x dx = T_0 \frac{\sin \beta_m W}{\beta_m} \left[-\frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n} \right]_0^L \\ &= -T_0 \frac{\sin \beta_m W}{\beta_m} \left(\frac{\cos \lambda_n L}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \end{aligned}$$

Το δεύτερο μέλος της Εξ. (3.1.46) επιλύεται ως εξής:

- $\int_{x=0}^L \sin^2 \lambda_n x dx = \int_{x=0}^L (1 - \cos^2 \lambda_n x) dx$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_{x=0}^L (1 - \cos^2 \lambda_n x) dx = \int_{x=0}^L dx - \int_{x=0}^L \frac{1+\cos(2\lambda_n x)}{2} dx$$

$$\Rightarrow [x]_0^L - \left[\frac{x}{2}\right]_0^L - \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(2\lambda_n x)}{2\lambda_n}\right]_0^L = \frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin(2\lambda_n L)$$

- $\int_{y=0}^W \cos^2 \beta_m y dy = \int_{y=0}^W \frac{1+\cos(2\beta_m y)}{2} dy = \left[\frac{y}{2}\right]_0^W + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\beta_m y)}{2\beta_m}\right]_0^W = \frac{W}{2} + \frac{1}{4\beta_m} \sin(2\beta_m W)$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και εφαρμόζοντάς τα στην Εξ. (3.1.46), προκύπτει:

$$A_{nm} = \frac{-T_0 \frac{\sin \beta_m W}{\beta_m} \left(\frac{\cos \lambda_n L}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} \right)}{\left[\frac{L}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n L \right] \left[\frac{W}{2} + \frac{1}{4\beta_m} \sin 2\beta_m W \right]}$$

$$\Rightarrow A_{nm} = \frac{-T_0 \frac{\sin \beta_m W \cos \lambda_n L}{\beta_m \lambda_n} + T_0 \frac{\sin \beta_m W}{\beta_m \lambda_n}}{\frac{LW}{4} + \frac{L \sin 2\beta_m W}{8\beta_m} - \frac{W \sin 2\lambda_n L}{8\lambda_n} - \frac{\sin 2\lambda_n L \sin 2\beta_m W}{16\lambda_n \beta_m}}$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή επί $16\lambda_n \beta_m$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$A_{nm} = \frac{-16T_0 \sin \beta_m W \cos \lambda_n L + 16T_0 \sin \beta_m W}{4LW\lambda_n \beta_m + 2L\lambda_n \sin 2\beta_m W - 2\beta_m W \sin 2\lambda_n L - \sin 2\lambda_n L \sin 2\beta_m W}$$

Με αντικατάσταση των λ_n και β_m από τις Εξ. (3.1.32) και (3.1.37) προκύπτει:

$$A_{nm} = \frac{16T_0 \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) [-\cos(n\pi)+1]}{2n\pi^2(2m+1) + 2n\pi \sin((2m+1)\pi) - (2m+1)\pi \sin(2n\pi) - \sin(2n\pi) \sin((2m+1)\pi)}$$

Δεδομένου ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- $\cos(n\pi) = (-1)^n$
- $\sin(2n\pi) = 0$
- $\sin(2m+1)\pi = 0$ και
- $\sin\frac{(2m+1)\pi}{2} = (-1)^m$

προκύπτει:

$$A_{nm} = \frac{16T_0(-1)^m[-(-1)^n+1]}{2n\pi^2(2m+1)} = \frac{8T_0(-1)^m[-(-1)^n+1]}{n\pi^2(2m+1)} \quad (3.1.47)$$

3.1.2 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί ο τρόπος επίλυσης προβλημάτων μόνιμης μετάδοσης θερμότητας στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Όπως στις καρτεσιανές, έτσι και στις κυλινδρικές συντεταγμένες η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών εφαρμόζεται όταν η μερική διαφορική εξίσωση καθώς και οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς. Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύχθηκε η διαφορική εξίσωση Laplace για κυλινδρικές συντεταγμένες, η οποία για σταθερή θερμική αγωγιμότητα, απουσία πηγής θερμότητας, δίνεται από την Εξ. (3.1.48) ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.48)$$

με $T = T(r, \varphi, z)$. Παρακάτω θα μελετηθούν διάφορες δυνατές περιπτώσεις μετάδοσης θερμότητας στις δύο διαστάσεις, ενώ περιγράφεται, και το τριδιάστατο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας.

Διδιάστατα Προβλήματα

Στερεός Κύλινδρος με $T = T(r, \varphi)$

Έστω ένας κύλινδρος μεγάλου μήκους ακτίνας ρ , στον οποίο η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται στις διευθύνσεις r , και φ , ενώ στη διεύθυνση z θεωρείται αμελητέα. Η εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου περικλείεται από ρευστό θερμοκρασίας $F(\varphi)$, επομένως η μετάδοση θερμότητας από την εξωτερική επιφάνεια ($r = \rho$) προς το ρευστό γίνεται μέσω συναγωγής. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη γενική διαφορική εξίσωση (3.1.49) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.50α), (3.1.50β), (3.1.50γ), και (3.1.50δ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r \leq \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.1.49)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (3.1.50\alpha)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\rho} = h[T|_{r=\rho} - F(\varphi)] \quad (3.1.50\beta)$$

$$T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi) \quad (3.1.50\gamma)$$

$$\left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi} = \left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi+2\pi} \quad (3.1.50\delta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες για τη διεύθυνση φ , (3.1.50γ) και (3.1.50δ), είναι ομογενείς και περιγράφουν την περιοδικότητα 2π της θερμοκρασίας στη διεύθυνση αυτή.

Αρχικά, γίνεται η υπόθεση ότι η θερμοκρασία μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και Φ , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή r και φ , αντίστοιχα, σύμφωνα με την Εξ. (3.1.51):

$$T(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \quad (3.1.51)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην Εξ. (3.1.49) και τον διαχωρισμό της συνάρτησης $\Phi(\varphi)$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \Phi(\varphi) \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) &= -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda^2 \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda^2 \quad (3.1.53)$$

με λ^2 τη σταθερά διαχωρισμού. Η γενική λύση της Εξ. (3.1.53) δίνεται από την Εξ. (3.1.54):

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos \lambda \varphi + A_2 \sin \lambda \varphi \quad (3.1.54)$$

Γενικά, οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π . Επομένως, ισχύει ότι $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ και $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. Για να ισχύουν λοιπόν οι συνοριακές συνθήκες (3.1.50γ) και (3.1.50δ), θα πρέπει η σταθερά λ να ισούται με:

$$\lambda_n = n = 0, 1, 2, \dots$$

Η Εξ. (3.1.52) μπορεί να γραφεί ως

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda_n^2 R = 0 \quad (3.1.55)$$

η οποία είναι μια εξίσωση Cauchy (ή Euler-Cauchy). Για την επίλυσή της εισάγεται μια νέα μεταβλητή για την οποία ισχύει:

$$\omega = \ln(r) \Rightarrow r = e^\omega \quad (3.1.56\alpha)$$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\omega} \frac{d\omega}{dr} = \frac{dR}{d\omega} \frac{1}{r} \quad (3.1.56\beta)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\omega^2} \frac{1}{r^2} - \frac{dR}{d\omega} \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\omega^2} - \frac{dR}{d\omega} \quad (3.1.56\gamma)$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (3.1.56α), (3.1.56β), και (3.1.56γ) στην Εξ. (3.1.55), προκύπτει:

$$\frac{d^2 R}{d\omega^2} - \lambda_n^2 R = 0, \quad (3.1.57)$$

η λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (3.1.58) ως

$$R_{\lambda_n} = A_3 r^{-\lambda_n} + A_4 r^{\lambda_n} \Rightarrow R_n = A_3 r^{-n} + A_4 r^n \quad (3.1.58)$$

Για να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη (3.1.50α) από την Εξ. (3.1.58), θα πρέπει ο όρος $A_3 r^{-n}$ να απαλειφθεί, καθώς όταν $r \rightarrow 0 \Rightarrow r^{-n} \rightarrow \infty$. Επομένως η Εξ. (3.1.58) γράφεται ως

$$R_n(r) = A_4 r^n \quad (3.1.59)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (3.1.54) και (3.1.59), και εισάγοντάς αυτές στην Εξ. (3.1.51), προκύπτει:

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi), \quad (3.1.60)$$

όπου $E_n = A_1 A_4$ και $G_n = A_2 A_4$. Για τον προσδιορισμό των σταθερών E_n και G_n , εφαρμόζεται η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη (3.1.50β), η οποία μπορεί να γραφεί και ως

$$F(\varphi) = \frac{h}{k} T|_{r=\rho} + \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \quad (3.1.61)$$

Αντικαθιστώντας το $T(r, \varphi)$ της Εξ. (3.1.60) στην (3.1.61) για $r = \rho$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{h}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (E_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} (E_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi) \\ \Rightarrow F(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) (E_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

Οι συναρτήσεις $\cos n\varphi$ και $\sin n\varphi$ είναι ορθογώνιες. Επομένως για την εύρεση των E_n και G_n , μπορεί να γίνει χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Εξ. (3.1.62) τα ολοκληρώματα $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi$.

Ισχύει ότι: $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin n\varphi \cos m\varphi d\varphi = 0$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos n\varphi \sin m\varphi d\varphi = 0$ για κάθε m, n .

Επομένως, για τον προσδιορισμό του E_n η Εξ. (3.1.62) πολλαπλασιάζεται αρχικά επί το $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi$ και γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \cos m\varphi d\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos m\varphi \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) (E_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi) d\varphi \\ \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \cos m\varphi d\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos m\varphi \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) (E_n \cos n\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

η οποία για $m = n$ γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \cos n\varphi d\varphi &= E_n \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi \\ \Rightarrow E_n &= \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \cos n\varphi d\varphi}{\rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi} \end{aligned} \quad (3.1.63\alpha)$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή G_n εισάγεται στην Εξ. (3.1.62) το $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi$ και έχουμε:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \sin m\varphi d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin m\varphi \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) (E_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi) d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \sin m\varphi d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin m\varphi \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) (G_n \sin n\varphi) d\varphi,$$

η οποία για $m = n$ γίνεται:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = G_n \rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi$$

$$\Rightarrow G_n = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi}{\rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi} \quad (3.1.63\beta)$$

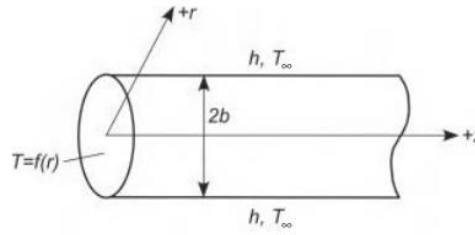
Αντικαθιστώντας τις Εξ. (3.1.63α) και (3.1.63β) στην Εξ. (3.1.60), προκύπτει:

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \cos n\varphi d\varphi}{\rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi} \cos n\varphi + \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi}{\rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi} \sin n\varphi \right) \Rightarrow$$

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^{n-1} \left(\frac{h}{k} \rho + n \right) \pi} \left[\cos n\varphi \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \cos n\varphi d\varphi + \sin n\varphi \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \right] \quad (3.1.64)$$

Στερεός Κύλινδρος με $T = T(r, z)$

Έστω ημι-άπειρος στερεός κυκλικός κύλινδρος του Σχήματος 3.1.3 ακτίνας b , στο οποίο η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται στις διευθύνσεις r και z . Στις επιφάνειες του κυλίνδρου $r = b$ υπάρχει ρευστό θερμοκρασίας T_{∞} , επομένως επικρατούν συνθήκες συναγωγής με συντελεστή συναγωγής h . Στην επιφάνεια $z = 0$ η θερμοκρασία δίνεται ως συνάρτηση του r , δηλαδή $T(z = 0) = F(r)$.



Σχήμα 3.1.3: Ημι-άπειρος κύλινδρος με $T = T(r, z)$ (Hahn & Özisik, 2012).

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.1.65) και από τις συνοριακές συνθήκες (3.1.66α), (3.1.66β) και (3.1.66γ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.65)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.1.66\alpha)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = h[T|_{r=b} - T_\infty] \quad (3.1.66\beta)$$

$$T(z = 0) = F(r), \quad T(z \rightarrow \infty) = T_\infty \quad (3.1.66\gamma)$$

Παρατηρείται ότι οι συνοριακές συνθήκες (3.1.66β) και (3.1.66γ) υπερβαίνουν το επιτρεπόμενο πλήθος των μη ομογενών συνθηκών. Επομένως, για να είναι εφικτή η εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών θα πρέπει να εισαχθεί μια νέα μεταβλητή για τη θερμοκρασία, έστω $\theta(r, z) = T(r, z) - T_\infty$. Αντικαθιστώντας την στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η νέα μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.1.67) και οι συνοριακές συνθήκες (3.1.68α), (3.1.68β) και (3.1.68γ), οι οποίες πληρούν το κριτήριο της ομογένειας:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.67)$$

$$\theta(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.1.68\alpha)$$

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=b} = h\theta|_{r=b} \quad (3.1.68\beta)$$

$$\theta(z = 0) = F(r) - T_\infty, \quad \theta(z \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.1.68\gamma)$$

Έστω ότι η Εξ. (3.1.67) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και Z , η κάθε μία από τις οποίες είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής r και z αντίστοιχα, σύμφωνα με την Εξ. (3.1.69) ως

$$\theta(r, z) = R(r)Z(z) \quad (3.1.69)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (3.1.69) στην Εξ. (3.1.67) και τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} Z \frac{d^2 R}{dr^2} + Z \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R \frac{d^2 Z}{dz^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = \lambda^2, \end{aligned} \quad (3.1.70)$$

όπου λ^2 ο συντελεστής διαχωρισμού. Η διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση R δίνεται από την Εξ.(3.1.71) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (3.1.71)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ (βλέπε Παράρτημα Β). Η λύση της Εξ. (3.1.71) δίνεται από την Εξ. (3.1.72) ως

$$R(r) = A_1 J_0(\lambda r) + A_2 Y_0(\lambda r), \quad (3.1.72)$$

όπου J_0 και Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (3.1.72) τη συνοριακή συνθήκη (3.1.68α), $\theta(r \rightarrow 0) \Rightarrow$ πεπερασμένη, ο όρος $A_2 Y_0(\lambda r)$ πρέπει να μηδενίζεται, καθώς $Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Δηλαδή, θα πρέπει

$A_2 = 0$. Το ίδιο συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί και από τη συνθήκη $\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$, αφού:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow -A_1 J_1(0) - A_2 Y_1(0) = 0$$

όπου $J_1(0) = 0$ και $Y_1(0) \rightarrow -\infty$. Άρα θα πρέπει ο συντελεστής A_2 να ισούται με μηδέν. Επομένως, η συνάρτηση (3.1.72) γράφεται ως

$$R(r) = A_1 J_0(\lambda r) \quad (3.1.73)$$

Με την αντικατάσταση της Εξ. (3.1.73) στη συνοριακή συνθήκη (3.1.68β), προκύπτει:

$$\begin{aligned} -kA \left. \frac{dJ_0(\lambda r)}{dr} \right|_{r=b} &= hA J_0(\lambda r)|_{r=b} \\ \Rightarrow J'_0(\lambda b) + \frac{h}{k} J_0(\lambda b) &= 0 \rightarrow \lambda_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.1.74)$$

όπου το λ_n υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους. Για $J'_0(\lambda b) = -\lambda J_1(\lambda b)$ και $\lambda = \lambda_n$ η Εξ. (3.1.74) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\lambda_n J_1(\lambda_n b) + \frac{h}{k} J_0(\lambda_n b) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_n J_1(\lambda_n b) &= \frac{h}{k} J_0(\lambda_n b) \\ (\times b) \Rightarrow \lambda_n b J_1(\lambda_n b) &= \frac{hb}{k} J_0(\lambda_n b) \\ \Rightarrow \beta J_1(\beta) &= Bi J_0(\beta) \rightarrow \beta_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.1.75)$$

όπου $\beta_n = \lambda_n b$, και $Bi = \frac{hb}{k}$, ο αριθμός Biot. Στο Παράρτημα Β παρουσιάζονται οι πρώτες έξι τιμές του β , για διάφορες τιμές του αριθμού Bi .

Η διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $Z(z)$ προκύπτει από την Εξ. (3.1.70) ως

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - Z\lambda^2 = 0 \quad (3.1.76)$$

με γενική λύση τη συνάρτηση (3.1.77):

$$Z(z) = A_3 e^{\lambda z} + A_4 e^{-\lambda z} \quad (3.1.77)$$

Με εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης $\theta(z \rightarrow \infty) = 0$ (Εξ. (3.1.68γ)) στην Εξ. (3.1.77), ο όρος $A_3 e^{\lambda z}$ μηδενίζεται, καθώς για $z \rightarrow \infty \rightarrow e^{\lambda z} \rightarrow \infty$. Επομένως $A_3 = 0$ και η συνάρτηση (3.1.77) γράφεται ως

$$Z(z) = A_4 e^{-\lambda_n z} \quad (3.1.78)$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις (3.1.73) και (3.1.77) και αντικαθιστώντας αυτές στην Εξ. (3.1.69) προκύπτει η λύση (3.1.79) ως

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 J_0(\lambda_n r) A_4 e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n z} \quad (3.1.79)$$

με $E_n = A_1 A_4$. Για την εύρεση του συντελεστή E_n , εφαρμόζεται στην Εξ. (3.1.79) η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη (3.1.68γ) για $z = 0$ και προκύπτει:

$$\theta(z = 0) = F(r) - T_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0(\lambda_n r) \quad (3.1.80)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, εφαρμόζουμε το $\int_{r=0}^b r J_0(\lambda_m r) dr$ και στα δύο μέλη της Εξ. (3.1.80):

$$\int_{r=0}^b (F(r) - T_{\infty}) r J_0(\lambda_m r) dr = \int_{r=0}^b \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0(\lambda_n r) r J_0(\lambda_m r) dr$$

Για $m = n$:

$$E_n = \frac{\int_{r=0}^b r (F(r) - T_{\infty}) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_{r=0}^b r J_0^2(\lambda_n r) dr} \quad (3.1.81)$$

Τέλος, με αντικατάσταση της σχέσης $\theta(r, z) = T(r, z) - T_{\infty}$ στην Εξ. (3.1.79), προκύπτει η θερμοκρασία $T(r, z)$ ως

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n z} + T_{\infty} \quad (3.1.82)$$

$T = T(r, z)$ για Κοίλο Κύλινδρο

Έστω κοίλος κύλινδρος με $a \leq r \leq b$ και $0 \leq z \leq L$. Οι συνοριακές επιφάνειες $r = b$, $z = 0$ και $z = L$ διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ στην επιφάνεια $r = a$ διέρχεται ροή θερμότητας $q(r = a) = F(z)$. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.1.83) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.84α) και (3.1.84β), ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad a \leq r \leq b \quad \text{και} \quad 0 \leq z \leq L \quad (3.1.83)$$

$$T(r = b) = 0, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} = F(z) \quad (3.1.84\alpha)$$

$$T(z = 0) = 0, \quad T(z = L) = 0 \quad (3.1.84\beta)$$

Εφόσον οι συνοριακές συνθήκες, εκτός μίας, είναι ομογενείς, η συνάρτηση $T(r, z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$T(r, z) = R(r)Z(z) \quad (3.1.85)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (3.1.85) στην Εξ. (3.1.83), και τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$, προκύπτει:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2 \quad (3.1.86)$$

όπου λ^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $Z(z)$ δίνεται από την Εξ. (3.1.87) ως

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + Z\lambda^2 = 0 \quad (3.1.87)$$

με γενική λύση την Εξ. (3.1.88):

$$Z(z) = A_1 \cos \lambda z + A_2 \sin \lambda z \quad (3.1.88)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $T(z = 0) = 0$, προκύπτει:

$$Z(z = 0) = 0 \Rightarrow A_1 \cos \lambda \cdot 0 + A_2 \sin \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

ενώ για $z = L$:

$$\begin{aligned} Z(z = L) = 0 &\Rightarrow A_2 \sin \lambda \cdot L = 0 \Rightarrow \sin \lambda \cdot L = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1.89)$$

Μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$ της Εξ. (3.1.86), προκύπτει η Εξ. (3.1.90) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (3.1.90)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ (βλέπε Παράρτημα Β). Η λύση της Εξ. (3.1.90) δίνεται από την Εξ. (3.1.91) ως

$$R(r) = A_3 J_0(\lambda r) + A_4 Y_0(\lambda r) \quad (3.1.91)$$

όπου J_0 και Y_0 τις συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (3.1.91) την συνοριακή συνθήκη (3.1.84α) για $r = 0$, ο συντελεστής A_4 μηδενίζεται, καθώς $Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως, η συνάρτηση (3.1.91) γράφεται ως

$$R(r) = A_3 J_0(\lambda r) \quad (3.1.92)$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις (3.1.88) και (3.1.92) προκύπτει η Εξ. (3.1.93) ως

$$T(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2 \sin \lambda_n z A_3 J_0(\lambda_n r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z \quad (3.1.93)$$

όπου $A_n = A_2 A_3$. Αντικαθιστώντας τη μη ομογενή συνοριακή συνθήκη (3.1.84α) για $r = a$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} F(z) = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} &\Rightarrow F(z) = -k \sum_{n=0}^{\infty} A_n J'_0(\lambda_n a) \sin \lambda_n z \\ F(z) &= k \alpha \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n a) \sin \lambda_n z \end{aligned} \quad (3.1.94)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας της συνάρτησης $\sin \lambda_n z$, εφαρμόζεται και στα δύο μέλη της Εξ. (3.1.94) το ολοκλήρωμα $\int_{z=0}^L \sin \lambda_m z dz$ και για $n = m$ προκύπτει:

$$A_n = \frac{\int_{z=0}^L F(z) \sin \lambda_n z dz}{k \alpha J_1(\lambda_n a) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz} \quad (3.1.95)$$

Τριδιάστατα Προβλήματα

$T = T(r, \varphi, z)$ για Στερεό Κύλινδρο

Έστω τριδιάστατος κύλινδρος ακτίνας $r = b$ και μήκους L , στον οποίο η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται στις τρεις διευθύνσεις r , φ και z . Στην επιφάνεια $r = b$ η ροή θερμότητας είναι $F(z, \varphi)$, στην $z = 0$ η θερμοκρασία είναι μηδέν, ενώ η επιφάνεια $z = L$ είναι μονωμένη.

Το πρόβλημα αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.1.96) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.97α), (3.1.97β), (3.1.97γ), (3.1.97δ) και (3.1.97ε):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.96)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (3.1.97\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = -F(z, \varphi) \quad (3.1.97\beta)$$

$$T(z = 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 \quad (3.1.97\gamma)$$

$$T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi), \text{ περιοδικότητα } 2\pi \quad (3.1.97\delta)$$

$$\left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi} = \left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi+2\pi}, \text{ περιοδικότητα } 2\pi \quad (3.1.97\epsilon)$$

Η συνοριακή συνθήκη (3.1.97β) είναι η μοναδική μη ομογενής συνοριακή συνθήκη, επομένως είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Έστω ότι η θερμοκρασία $T(r, \varphi, z)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R , Φ , και Z , κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή r , φ , και z αντίστοιχα, και εκφράζεται από την Εξ. (3.1.98) ως

$$T(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (3.1.98)$$

η οποία αντικαθίσταται στην Εξ. (3.1.96) και προκύπτει:

$$\Phi Z \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \Phi Z \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} R Z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + R \Phi \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Διαιρώντας με $R\Phi Z$ και διαχωρίζοντας τη μεταβλητή $Z(z)$:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \lambda^2 \quad (3.1.99)$$

όπου λ^2 μια σταθερά διαχωρισμού. Η διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $Z(z)$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 Z = 0 \quad (3.1.100)$$

με γενική λύση την Εξ. (3.1.101):

$$Z(z) = A_1 \cos \lambda z + A_2 \sin \lambda z \quad (3.1.101)$$

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (3.1.101) τη συνοριακή συνθήκη (3.1.97γ) για $z = 0$, προκύπτει:

$$Z(z = 0) = 0 \Rightarrow A_1 \cos \lambda \cdot 0 + A_2 \sin \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

Επομένως η Εξ. (3.1.101) γίνεται:

$$Z(z) = A_2 \sin \lambda z, \quad (3.1.102)$$

ενώ για $z = L$ στην Εξ. (3.1.102), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=L} = 0 &\Rightarrow \lambda L A_2 \cos \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L \cos \lambda L = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \\ &\Rightarrow \lambda L = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1.103)$$

Η Εξ. (3.1.99), μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $\Phi(\varphi)$, γίνεται:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) - r^2 \lambda_n^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \eta^2 \quad (3.1.104)$$

και

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \eta^2 \Phi = 0 \quad (3.1.105)$$

Η γενική λύση της Εξ. (3.1.105) είναι:

$$\Phi(\varphi) = A_3 \cos \eta \varphi + A_4 \sin \eta \varphi \quad (3.1.106)$$

Για να ισχύουν οι συνθήκες περιοδικότητας 2π , θα πρέπει $\eta_m = m = 0, 1, 2, \dots$

Τέλος, η Εξ. (3.1.99) αναδιατάσσεται και γράφεται:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \left(\lambda_n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.1.107)$$

η οποία είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel τάξης m η λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (3.1.108) ως

$$R(r) = A_5 I_m(\lambda_n r) + A_6 K_m(\lambda_n r) \quad (3.1.108)$$

όπου I_m και K_m οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

Με την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (3.1.97α) απαλείφεται ο όρος $A_6 K_m(\lambda r)$, καθώς $K_m(r \rightarrow 0) \rightarrow +\infty$. Άρα η λύση (3.1.108) γίνεται:

$$R(r) = A_5 I_m(\lambda_n r) \quad (3.1.109)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (3.1.102), (3.1.106) και (3.1.109) στην Εξ. (3.1.98), προκύπτει:

$$T(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_5 I_m(\lambda_n r) A_2 \sin \lambda_n z (A_3 \cos m\varphi + A_4 \sin m\varphi)$$

$$\Rightarrow T(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\lambda_n r) \sin \lambda_n z (a_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi) \quad (3.1.110)$$

όπου $a_{mn} = A_2 A_3 A_5$ και $\beta_{mn} = A_2 A_4 A_5$. Για την εύρεση των συντελεστών a_{mn} και β_{mn} , θα εφαρμοστεί η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη (3.1.97β) ως εξής:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = -F(z, \varphi) \Rightarrow k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dI_m(\lambda_n r)}{dr} \Big|_{r=b} \sin \lambda_n z (a_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi) = F(z, \varphi) \quad (3.1.111)$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή a_{mn} , χρησιμοποιούμε και στα δύο μέλη της Εξ.

(3.1.111), τα ολοκληρώματα $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos p\varphi d\varphi$ και $\int_{z=0}^L \sin \lambda_j z dz$, και έχουμε:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dI_m(\lambda_n r)}{dr} \Big|_{r=b} \sin \lambda_n z (a_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi) \sin \lambda_j z \cos p\varphi dz d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_j z \cos p\varphi dz d\varphi$$

$$\Rightarrow k \left(\frac{m}{b} I_m(\lambda_n b) + \lambda_n I_{m+1}(\lambda_n b) \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{mn} \sin \lambda_n z \cos m\varphi \sin \lambda_j z \cos p\varphi + \beta_{mn} \sin \lambda_n z \sin m\varphi \sin \lambda_j z \cos p\varphi) dz d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_j z \cos p\varphi dz d\varphi$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, για $\lambda_n = \lambda_j$ και $m = p$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{mn} k \left(\frac{m}{b} I_m(\lambda_n b) + \lambda_n I_{m+1}(\lambda_n b) \right) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_n z \cos m\varphi dz d\varphi \\ \Rightarrow a_{mn} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_n z \cos m\varphi dz d\varphi}{k \left(\frac{m}{b} I_m(\lambda_n b) + \lambda_n I_{m+1}(\lambda_n b) \right) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi} \end{aligned} \quad (3.1.112)$$

Με παρόμοιο τρόπο προσδιορίζεται και ο συντελεστής β_{mn} , χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin p\varphi d\varphi$ και $\int_{z=0}^L \sin \lambda_j z dz$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dI_m(\lambda_n r)}{dr} \Big|_{r=b} \sin \lambda_n z (a_{mn} \cos m\varphi + \beta_{mn} \sin m\varphi) \sin \lambda_j z \sin p\varphi dz d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_j z \sin p\varphi dz d\varphi \\ \Rightarrow k \left(\frac{m}{b} I_m(\lambda_n b) + \lambda_n I_{m+1}(\lambda_n b) \right) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{mn} \sin \lambda_n z \cos m\varphi \sin \lambda_j z \sin p\varphi + \beta_{mn} \sin \lambda_n z \sin m\varphi \sin \lambda_j z \sin p\varphi) dz d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_j z \sin p\varphi dz d\varphi \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, για $\lambda_n = \lambda_j$ και $m = p$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta_{mn} k \left(\frac{m}{b} I_m(\lambda_n b) + \lambda_n I_{m+1}(\lambda_n b) \right) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi = \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_n z \sin m\varphi dz d\varphi \\ \Rightarrow \beta_{mn} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L F(z, \varphi) \sin \lambda_n z \sin m\varphi dz d\varphi}{k \left(\frac{m}{b} I_m(\lambda_n b) + \lambda_n I_{m+1}(\lambda_n b) \right) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi} \end{aligned} \quad (3.1.113)$$

3.1.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν διάφορα ομογενή προβλήματα μετάδοσης θερμότητας, μονοδιάστατα ή πολυδιάστατα, στις σφαιρικές συντεταγμένες, με χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών.

Η γενική εξίσωση μετάδοσης θερμότητας που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2, δίνεται από την Εξ. (3.1.114) ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \dot{g} &= \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{g}}{k} &= \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.1.114)$$

Για να γίνει ευκολότερη η επίλυση της Εξ. (3.1.114), εισάγεται μια νέα μεταβλητή

$$\mu = \cos \theta \quad \text{με} \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad \text{για} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.1.115)$$

Ισχύουν τα εξής:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \mu^2$
- $\mu = \cos \theta \Rightarrow d\mu = -\sin \theta d\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{d\mu}{\sin \theta}$

τα οποία αντικαθίστανται στην Εξ. (3.1.114) και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (1-\mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{g}}{k} &= \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1-\mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{g}}{k} &= \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.1.116)$$

με $T = T(r, \mu, \varphi, t)$. Ορίζοντας επίσης μια νέα εξαρτημένη μεταβλητή

$$V(r, \mu, \varphi, t) = r^{\frac{1}{2}} T(r, \mu, \varphi, t) \quad (3.1.117)$$

και αντικαθιστώντας την στην Εξ. (3.1.116), προκύπτει:

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} V + \frac{2}{r} \left(r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} V \right) + r^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{r^{-\frac{5}{2}}}{(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{g}}{k} &= \\ = \frac{1}{a} r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $r^{-\frac{1}{2}}$:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1-\mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{g}}{k} r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.1.118)$$

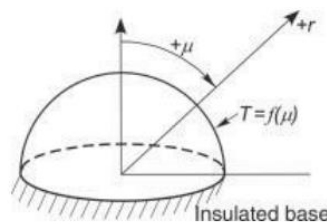
Η Εξ. (3.1.118) χρησιμοποιείται σε προβλήματα στα οποία $T = T(r, \mu, t)$ και $T = T(r, \mu, \varphi, t)$, καθώς τότε η λύση της εξίσωσης για την $R(r)$ που προκύπτει, είναι οι συναρτήσεις Bessel για κυλινδρικές συντεταγμένες που παρουσιάστηκαν στο Παράρτημα Β. Αντίθετα, αν γίνει χρήση της Εξ. (3.1.116) για τέτοιου είδους προβλήματα, τότε η λύση $R(r)$ της εξίσωσης είναι οι συναρτήσεις Bessel για σφαιρικές συντεταγμένες οι οποίες είναι πιο πολύπλοκες. Ωστόσο, για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε η Εξ. (3.1.116) είτε η Εξ. (3.1.118).

Παρακάτω θα μελετηθούν διάφορες περιπτώσεις μετάδοσης θερμότητας στις σφαιρικές συντεταγμένες, για μόνιμη ροή.

Διδιάστατα Προβλήματα

$T = T(r, \mu)$ για Στερεό Ημισφαίριο

Έστω το στερεό ημισφαίριο του Σχήματος 3.1.4, ακτίνας b , στο οποίο η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται κατά τις διευθύνσεις r και μ . Στην επιφάνεια $r = b$ η θερμοκρασία είναι $T(r = b) = F(\mu)$, ενώ η συνοριακή επιφάνεια $\mu = 0$ είναι μονωμένη.



Σχήμα 3.1.4: Στερεό ημισφαίριο (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα περιγράφεται από την Εξ. (3.1.119) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.120α) και (3.1.120β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) = 0, \quad \mu \in 0 \leq \mu \leq 1 \quad (3.1.119)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad T(r = b) = F(\mu) \quad (3.1.120\alpha)$$

$$T(\mu \rightarrow +1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = 0 \quad (3.1.120\beta)$$

Όλες οι συνοριακές συνθήκες, εκτός την (3.1.120α) για $r = b$, είναι ομογενείς, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Έστω ότι η θερμοκρασία $T(r, \mu)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και M , η κάθε μία από τις οποίες

εξαρτάται μόνο από την μεταβλητή r και μ αντίστοιχα, και εκφράζεται από την Εξ. (3.1.121) ως

$$T(r, \mu) = R(r)M(\mu) \quad (3.1.121)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.1.121) στην Εξ. (3.1.119), προκύπτει:

$$M \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} M \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} R \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial M}{\partial \mu} \right) = 0$$

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με RM και πολλαπλασιάζοντας επί r^2 , προκύπτουν:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = - \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial M}{\partial \mu} \right) = n(n+1) \quad (3.1.122)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + n(n+1)M = 0 \quad (3.1.123)$$

όπου $n(n+1)$ η σταθερά διαχωρισμού. Η Εξ. (3.1.123) που ανακύπτει μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $M(\mu)$, είναι η εξίσωση Legendre η οποία μελετάται στο Παράρτημα Β. Η λύση της Εξ. (3.1.123) δίνεται από την Εξ. (3.1.124) ως

$$M(\mu) = A_1 P_n(\mu) + A_2 Q_n(\mu), \quad (3.1.124)$$

όπου $P_n(\mu)$ και $Q_n(\mu)$ τα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους, για $n = 0, 1, 2, \dots$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.120β) για $\mu \rightarrow +1$ απαλείφεται ο όρος $A_2 Q_n(\mu)$, καθώς $Q_n(\mu) \rightarrow \infty$ για $\mu = \pm 1$. Επομένως $A_2 = 0$ και η Εξ. (3.1.124) εκφράζεται πλέον από την Εξ. (3.1.125):

$$M(\mu) = A_1 P_n(\mu) \quad (3.1.125)$$

Για $\mu = 0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$) ισχύει:

$$\left. \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = 0 \quad \text{για } n = 0, 2, 4, \dots \quad (3.1.126)$$

Διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $R(r)$ στην Εξ. (3.1.122), προκύπτει η Εξ. (3.1.127) ως

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (3.1.127)$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Cauchy (ή Euler-Cauchy). Για την επίλυσή της, θεωρούμε:

$$\omega = \ln(r) \rightarrow r = e^\omega \quad (3.1.128\alpha)$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\omega} \frac{d\omega}{dr} = \frac{dR}{d\omega} \frac{1}{r} \quad (3.1.128\beta)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\omega^2} \frac{1}{r^2} - \frac{dR}{d\omega} \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\omega^2} - \frac{dR}{d\omega} \quad (3.1.128\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (3.1.128α), (3.1.128β) και (3.1.128γ) στην Εξ. (3.1.127) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\omega^2} - \frac{dR}{d\omega} + 2 \frac{dR}{d\omega} - n(n+1)R &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 R}{d\omega^2} + \frac{dR}{d\omega} - n(n+1)R &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.129)$$

Η Εξ. (3.1.129) είναι μια ομογενής, συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Οι χαρακτηριστικές ρίζες της είναι $R_1(\omega) = n$ και

$R_2(\omega) = -(n+1)$. Επομένως η γενική λύση της Εξ. (3.1.127) δίνεται από την Εξ. (3.1.130) ως

$$R(r) = A_3 r^n + A_4 r^{-(n+1)} \quad (3.1.130)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.120α) για $r \rightarrow 0$, απαλείφεται ο όρος $A_4 r^{-(n+1)}$, καθώς $r^{-(n+1)} \rightarrow \infty$. Επομένως, πρέπει $A_4 = 0$, και η Εξ. (3.1.130) γράφεται ως

$$R(r) = A_3 r^n \quad (3.1.131)$$

Τελικά η θερμοκρασία $T(r, \mu)$ ισούται με το γινόμενο των Εξ. (3.1.125) και (3.1.131):

$$\begin{aligned} T(r, \mu) &= A_3 r^n A_1 P_n(\mu) \\ \Rightarrow T(r, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \quad \text{για } n = 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.1.132)$$

με $A_n = A_1 A_3$. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς A_n , εφαρμόζεται στην Εξ. (3.1.132) η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη (3.1.120α), για $r = b$, και προκύπτει η Εξ. (3.1.133) ως

$$T(r = b) = F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\mu) \quad (3.1.133)$$

Στη συνέχεια γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre, με χρήση του $\int_{\mu=0}^1 P_k(\mu) d\mu$, με $k = 0, 2, 4, \dots$, και στα δύο μέλη της Εξ. (3.1.133), δεδομένου ότι $\int_{\mu=0}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \neq 0$ για $n = k$:

$$\begin{aligned} \int_{\mu=0}^1 F(\mu) P_k(\mu) d\mu &= \int_{\mu=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \\ \Rightarrow A_n &= \frac{\int_{\mu=0}^1 F(\mu) P_n(\mu) d\mu}{b^n \int_{\mu=0}^1 P_n^2(\mu) d\mu} \end{aligned} \quad (3.1.134)$$

$T(r, \mu)$ για Στερεά Σφαίρα

Έστω στερεά σφαίρα με $0 \leq r \leq b$, $-1 \leq \mu \leq 1$. Στη συνοριακή επιφάνεια $r = b$ μεταδίδεται ροή θερμότητας $q(r = b) = F(\mu, \varphi)$. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.1.135) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.136α), (3.1.136β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) = 0, \quad 0 \leq r \leq b \text{ και } -1 \leq \mu \leq 1 \quad (3.1.135)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad q(r = b) = F(\mu, \varphi) \quad (3.1.136\alpha)$$

$$T(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (3.1.136\beta)$$

Όλες οι συνοριακές συνθήκες, εκτός από την (3.1.136α) για $r = b$, είναι ομογενείς, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Θεωρείται πως η θερμοκρασία $T(r, \mu)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και M , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από την μεταβλητή r και μ αντίστοιχα, και εκφράζεται από την Εξ. (3.1.137) ως

$$T(r, \mu) = R(r)M(\mu) \quad (3.1.137)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.1.137) στην Εξ. (3.1.135), και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $M(\mu)$, προκύπτουν:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial M}{\partial \mu} \right) = n(n+1) \quad (3.1.138)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + n(n+1)M = 0 \quad (3.1.139)$$

όπου $n(n+1)$ η σταθερά διαχωρισμού. Η Εξ. (3.1.139) είναι η εξίσωση Legendre η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (3.1.140) ως

$$M(\mu) = A_1 P_n(\mu) + A_2 Q_n(\mu) \quad (3.1.140)$$

όπου $P_n(\mu)$ και $Q_n(\mu)$ τα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους, για $n = 0, 1, 2, \dots$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.136β), απαλείφεται ο όρος $A_2 Q_n(\mu)$, καθώς $Q_n(\mu) \rightarrow \infty$ για $\mu = \pm 1$. Επομένως $A_2 = 0$ και η συνάρτηση $M(\mu)$ εκφράζεται πλέον από την Εξ. (3.1.141) ως

$$M(\mu) = A_1 P_n(\mu) \quad (3.1.141)$$

Διαχωρίζοντας τον όρο $R(r)$ στην Εξ. (3.1.138), προκύπτει η Εξ. (3.1.142) ως

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (3.1.142)$$

η οποία είναι μια εξίσωση Cauchy (ή Euler-Cauchy). Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, από την επίλυσή της προκύπτει η γενική λύση (3.1.143):

$$R(r) = A_3 r^n + A_4 r^{-(n+1)} \quad (3.1.143)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.136α), για $r \rightarrow 0$, απαλείφεται ο όρος $A_4 r^{-(n+1)}$, καθώς $r^{-(n+1)} \rightarrow \infty$. Επομένως πρέπει το $A_4 = 0$, και η Εξ. (3.1.143) γράφεται ως

$$R(r) = A_3 r^n \quad (3.1.144)$$

Τελικά η θερμοκρασία $T(r, \mu)$ ισούται με το γινόμενο των Εξ. (3.1.141) και (3.1.144):

$$T(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \quad \text{για } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.145)$$

με $A_n = A_1 A_3$. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς A_n , χρησιμοποιούμε στην Εξ. (3.1.145) τη μη ομογενή συνοριακή συνθήκη (3.1.136α), για $r = b$, και προκύπτει η Εξ. (3.1.146) ως

$$\begin{aligned} F(r, \mu) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} &\Rightarrow F(r, \mu) = -k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial [A_n r^n P_n(\mu)]}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ F(r, \mu) &= -k \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu) n b^{n-1} \end{aligned} \quad (3.1.146)$$

Στη συνέχεια γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre, με την χρήση του $\int_{\mu=-1}^1 P_k(\mu) d\mu$, με $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, και στα δύο μέλη της Εξ. (3.1.146), δεδομένου ότι $\int_{\mu=-1}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \neq 0$ για $n = k$. Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{\mu=-1}^1 F(r, \mu) P_k(\mu) d\mu &= -k \int_{\mu=-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n n b^{n-1} P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \\ \Rightarrow A_n &= \frac{\int_{\mu=0}^1 F(r, \mu) P_n(\mu) d\mu}{-(k n b^{n-1}) \int_{\mu=-1}^1 P_n^2(\mu) d\mu} \end{aligned} \quad (3.1.147)$$

Τριδιάστατα Προβλήματα

$T(r, \mu, \varphi)$ για Στερεά Σφαίρα

Έστω στερεά σφαίρα ακτίνας b , στην οποία η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται στις τρεις διευθύνσεις r , μ , και φ . Η θερμοκρασία στην επιφάνεια $r = b$ είναι $T(r = b) = F(\mu, \varphi)$. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.1.148) και τις συνοριακές συνθήκες (3.1.149α), (3.1.149β), (3.1.149γ) και (3.1.149δ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ -1 \leq \mu \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.1.148)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad T(r = b) = F(\mu, \varphi) \quad (3.1.149\alpha)$$

$$T(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (3.1.149\beta)$$

$$T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi) \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (3.1.149\gamma)$$

$$\left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi} = \left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi+2\pi} \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (3.1.149\delta)$$

Δεδομένου πως όλες οι συνοριακές συνθήκες, εκτός μίας, είναι ομογενείς, η θερμοκρασία $T(r, \mu, \varphi)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R , M και Φ η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή r , μ και φ αντίστοιχα, και δίνεται από την Εξ. (3.1.150) ως

$$T(r, \mu, \varphi) = R(r)M(\mu)\Phi(\varphi) \quad (3.1.150)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.1.150) στην Εξ. (3.1.148), προκύπτει:

$$M\Phi \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} M\Phi \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R\Phi \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{(1 - \mu^2)} RM \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\left(\times \frac{r^2}{RM\Phi} \right) \Rightarrow \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \quad (3.1.151)$$

Μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, προκύπτει η Εξ. (3.1.152) ως

$$-\frac{1}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) = n(n + 1) \quad (3.1.152)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n + 1)R = 0 \quad (3.1.153)$$

όπου $n(n + 1)$ η σταθερά χωρισμού. Η Εξ. (3.1.153) είναι εξίσωση Cauchy, η λύση της οποίας δίνεται ως

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \quad (3.1.154)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (3.1.149α) για $r \rightarrow 0$, προκύπτει ότι $A_2 = 0$ εφόσον

$r^{-(n+1)} \rightarrow \infty$. Επομένως η παραπάνω σχέση εκφράζεται πλέον από την Εξ. (3.1.155):

$$R(r) = A_1 r^n \quad (3.1.155)$$

Διαχωρίζοντας τον όρο $\Phi(\varphi)$ της Εξ. (3.1.152) προκύπτει η Εξ. (3.1.156) ως

$$\frac{(1 - \mu^2)}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + (1 - \mu^2)n(n + 1) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2 \quad (3.1.156)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (3.1.157)$$

όπου m^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η γενική λύση της Εξ. (3.1.157) δίνεται από την Εξ. (3.1.158) ως

$$\Phi(\varphi) = A_3 \cos m\varphi + A_4 \sin m\varphi \quad (3.1.158)$$

Για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες (3.1.149γ) και (3.1.149δ) οι οποίες αφορούν την περιοδικότητα 2π , θα πρέπει να ισχύει $m = 0, 1, 2, \dots$

Τέλος, γίνεται ο διαχωρισμός της συνάρτησης $M(\mu)$ της Εξ. (3.1.152), και προκύπτει η Εξ. (3.1.159) ως

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)} \right) = 0 \quad (3.1.159)$$

η οποία είναι η προσαρτημένη εξίσωση Legendre. Για $m \leq n \rightarrow n = 0, 1, 2, \dots$ η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από την Εξ. (3.1.160) ως

$$M(\mu) = A_5 P_n^m(\mu) + A_6 Q_n^m(\mu) \quad (3.1.160)$$

όπου $P_n^m(\mu)$ και $Q_n^m(\mu)$ τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους τάξης m και βαθμού n .

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.1.149β), απαλείφεται ο όρος $A_6 Q_n^m(\mu)$ με $A_6 = 0$, καθώς για $\mu \rightarrow \pm 1 \rightarrow Q_n^m(\mu) \rightarrow \infty$. Επομένως η συνάρτηση $M(\mu)$ περιγράφεται πλέον από την Εξ. (3.1.161) ως

$$M(\mu) = A_5 P_n^m(\mu) \quad (3.1.161)$$

Τελικά η θερμοκρασία $T(r, \mu, \varphi)$ γράφεται ως γινόμενο των Εξ. (3.1.154), (3.1.158) και (3.1.161), και δίνεται από την Εξ. (3.1.162) ως

$$\begin{aligned} T(r, \mu, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_1 r^n A_5 P_n^m(\mu) (A_3 \cos m\varphi + A_4 \sin m\varphi) \\ \Rightarrow T(r, \mu, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n P_n^m(\mu) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) \end{aligned} \quad (3.1.162)$$

όπου $a_{nm} = A_1 A_3 A_5$ και $b_{nm} = A_1 A_4 A_5$. Με αντικατάσταση της μη ομογενούς συνθήκης (3.1.149α) για $r = b$, προκύπτει:

$$T(r = b) = F(\mu, \varphi) \Rightarrow F(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n b^n P_n^m(\mu) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) \quad (3.1.163)$$

Για τον προσδιορισμό των a_{nm} και b_{nm} , γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνικότητας των πολυωνύμων Legendre και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos m\varphi$ και $\sin m\varphi$.

Αρχικά, υπολογίζεται το a_{nm} με την χρήση των $\int_{\mu=-1}^1 P_k^m(\mu) d\mu$, με $k = 0, 1, 2, \dots$, και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos p\varphi d\varphi$ στα δύο μέλη της Εξ. (3.1.163), και για $k = n$ και $p = m$ προκύπτει:

$$\Rightarrow a_{mn} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 F(\mu, \varphi) P_n^m(\mu) \cos m\varphi d\mu d\varphi}{b^n \int_{\mu=-1}^1 [P_n^m(\mu)]^2 d\mu \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi} \quad (3.1.164)$$

Το b_{nm} προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τα $\int_{\mu=-1}^1 P_k^m(\mu) d\mu$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin p\varphi d\varphi$ στα δύο μέλη της Εξ. (3.1.163), και για $k = n$ και $p = m$ προκύπτει:

$$\Rightarrow b_{mn} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 F(\mu, \varphi) P_n^m(\mu) \sin m\varphi d\mu d\varphi}{b^n \int_{\mu=-1}^1 [P_n^m(\mu)]^2 d\mu \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi} \quad (3.1.165)$$

3.2 Μη Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος της Υπέρθωσης

Στην προηγούμενη ενότητα επιλύθηκαν ομογενή προβλήματα, δηλαδή προβλήματα με ομογενή διαφορική εξίσωση και ομογενείς συνοριακές συνθήκες, με εξαίρεση μόνο μίας μη ομογενούς. Για την επίλυση προβλημάτων με παραπάνω από μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη ή με μη ομογενή διαφορική εξίσωση (π.χ. όταν υπάρχει παραγωγή ενέργειας), χρησιμοποιείται η μέθοδος της υπέρθεσης. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει τη κατάτμηση των μη ομογενών προβλημάτων σε απλούστερα ομογενή, τα οποία μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Έστω ένα μη ομογενές πρόβλημα, το οποίο αποτελείται από τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (3.2.1), τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες (3.2.2α) και την αρχική συνθήκη (3.2.2β):

$$\nabla^2 T(\hat{r}, t) + \frac{\dot{g}(\hat{r})}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\hat{r}, t)}{\partial t}, \quad t > 0 \quad (3.2.1)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = G_i(\hat{r}) \quad (3.2.2\alpha)$$

$$T(\hat{r}, t = 0) = F(\hat{r}) \quad (3.2.2\beta)$$

όπου $\hat{r}$ οι γενικές χωρικές συντεταγμένες και $i = 1, 2, 3, \dots, N$ οι συνοριακές επιφάνειες. Αυτό το πρόβλημα αναλύεται σε δύο απλούστερα, ένα μη μόνιμο $T_H(\hat{r}, t)$, και ένα μόνιμο $T_{SS}(\hat{r})$, ως εξής:

$$T(\hat{r}, t) = T_H(\hat{r}, t) + T_{SS}(\hat{r}) \quad (3.2.3)$$

όπου $T_H(\hat{r}, t)$ είναι το ομογενές πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει την ομογενή διαφορική εξίσωση και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες, και $T_{SS}(\hat{r})$ το μη ομογενές, το οποίο αποτελείται από τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση καθώς και τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Το μη μόνιμο και ομογενές πρόβλημα, περιγράφεται ως εξής:

$$\nabla^2 T_H(\hat{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_H(\hat{r}, t)}{\partial t}, \quad t > 0 \quad (3.2.4)$$

$$k \frac{\partial T_H}{\partial n_i} + h_i T_H = 0 \quad (3.2.5\alpha)$$

$$T_H(\hat{r}, t = 0) = F(\hat{r}) - T_{SS}(\hat{r}) \quad (3.2.5\beta)$$

και το μόνιμο, μη ομογενές:

$$\nabla^2 T_{SS}(\hat{r}) + \frac{\dot{g}(\hat{r})}{k} = 0 \quad (3.2.6)$$

$$k \frac{\partial T_{SS}}{\partial n_i} + h_i T_{SS} = G_i(\hat{r}) \quad (3.2.7)$$

Το μη μόνιμο πρόβλημα, $T_H(\hat{r}, t)$, μπορεί πλέον να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, δεδομένου πως όλες οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς. Αντίθετα, το μη ομογενές πρόβλημα εξακολουθεί να μην πληροί τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών, καθώς εκτός από τη διαφορική εξίσωση είναι μη ομογενείς και οι συνοριακές συνθήκες. Για την αντιμετώπιση του μη ομογενούς προβλήματος, η συνάρτηση $T_{SS}(\hat{r})$ γράφεται ως

$$T_{SS}(\hat{r}) = T_A(\hat{r}) + T_B(\hat{r}) \quad (3.2.8)$$

όπου $T_A(\hat{r})$ το πρόβλημα με ομογενή διαφορική εξίσωση, αλλά μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες, και $T_B(\hat{r})$ το πρόβλημα με μη ομογενή διαφορική εξίσωση και ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Τα δύο αυτά προβλήματα περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\nabla^2 T_A(\hat{r}) = 0 \quad (3.2.9)$$

$$k \frac{\partial T_A}{\partial n_i} + h_i T_A = G_i(\hat{r}) \quad (3.2.10)$$

και

$$\nabla^2 T_B(\hat{r}) + \frac{\dot{g}(\hat{r})}{k} = 0 \quad (3.2.11)$$

$$k \frac{\partial T_B}{\partial n_i} + h_i T_B = 0 \quad (3.2.12)$$

Παρατηρείται πως δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών και στα δύο προβλήματα. Το πρόβλημα $T_A(\hat{r})$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα προβλημάτων, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει μόνο μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη, και τα οποία μπορούν να επιλυθούν με την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Τέλος, το πρόβλημα $T_B(\hat{r})$, μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο προβλημάτων $\Psi(\hat{r})$, το οποίο περιλαμβάνει

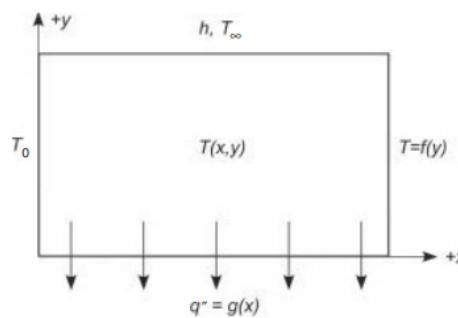
την ομογενή μερική διαφορική εξίσωση, και $\Phi(\hat{r})$, το οποίο περιλαμβάνει μια συνήθη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (δηλαδή περιλαμβάνει τον όρο $\frac{\dot{q}(\hat{r})}{k}$).

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η μέθοδος της υπέρθεσης, μέσω επίλυσης προβλημάτων μόνιμης μετάδοσης θερμότητας σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

3.2.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

$T = T(x, y)$ με Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες

Έστω η ορθογωνική πλάκα του Σχήματος 3.2.1 διαστάσεων $L \times W$, στην οποία η θερμότητα μεταδίδεται στις διαστάσεις x και y , με μόνιμη συνθήκες.



Σχήμα 3.2.1: Ορθογωνική πλάκα διαστάσεων $L \times W$ (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση Laplace), Εξ. (3.2.13), και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.14α) και (3.2.14β):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.13)$$

$$T(x=0) = T_0, \quad T(x=L) = F(y) \quad (3.2.14\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -G(x), \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = h[T|_{y=W} - T_\infty] \quad (3.2.14\beta)$$

Παρατηρείται πως όλες οι συνοριακές συνθήκες είναι μη ομογενείς, επομένως δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Το πρόβλημα της μη ομογένειας αντιμετωπίζεται με την υπέρθεση τεσσάρων προβλημάτων, κάθε ένα από τα οποία

περιλαμβάνει μόνο μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη. Η γενική λύση γράφεται με την Εξ. (3.2.15) ως

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) + T_3(x, y) + T_4(x, y) \quad (3.2.15)$$

Το πρώτο πρόβλημα με γενική λύση την $T_1(x, y)$, αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.16) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.17α) και (3.2.17β):

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.16)$$

$$T_1(x = 0) = T_0, \quad T_1(x = L) = 0 \quad (3.2.17\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad -k \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_{y=W} = hT_1|_{y=W} \quad (3.2.17\beta)$$

με μόνο μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη, την (3.2.17α) για $x = 0$.

Αντίστοιχα, το δεύτερο πρόβλημα με γενική λύση την $T_2(x, y)$, αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.18) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.19α) και (3.2.19β):

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.18)$$

$$T_2(x = 0) = 0, \quad T_2(x = L) = F(y) \quad (3.2.19\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad -k \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=W} = hT_2|_{y=W} \quad (3.2.19\beta)$$

με μη ομογενή συνοριακή συνθήκη, την (3.2.19α) για $x = L$.

Το τρίτο πρόβλημα με γενική λύση την $T_3(x, y)$, αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.20) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.21α) και (3.2.21β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.20)$$

$$T_3(x = 0) = 0, \quad T_3(x = L) = 0 \quad (3.2.21\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = -G(x), \quad -k \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=W} = hT_3|_{y=W} \quad (3.2.21\beta)$$

με μη ομογενή συνοριακή συνθήκη, την (3.2.21β) για $y = 0$.

Τέλος, το τέταρτο πρόβλημα με γενική λύση την $T_4(x, y)$, αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.22) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.23α) και (3.2.23β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.22)$$

$$T_4(x = 0) = 0, \quad T_4(x = L) = 0 \quad (3.2.23\alpha)$$

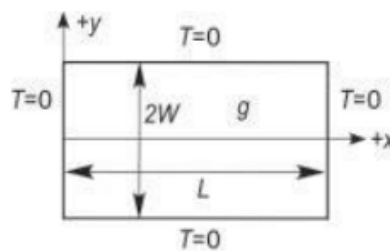
$$-k \frac{\partial T_4}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad -k \frac{\partial T_4}{\partial y} \Big|_{y=W} = hT_4|_{y=W} - T_\infty \quad (3.2.23\beta)$$

με μη ομογενή συνοριακή συνθήκη, την (3.2.23β) για $y = W$.

Τα παραπάνω προβλήματα είναι ομογενή, επομένως μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (βλέπε Ενότητα 3.1.1). Το άθροισμα των γενικών λύσεων αυτών των προβλημάτων, δίνει τη γενική λύση της Εξ. (3.2.13).

$T = T(x, y)$ με Πηγή Θερμότητας

Έστω η ορθογωνική πλάκα του Σχήματος 3.2.2 διαστάσεων $L \times 2W$, στην οποία η θερμότητα μεταδίδεται στις διαστάσεις x και y , με μόνιμη ροή και εσωτερική παραγωγή θερμότητας.



Σχήμα 3.2.2: Ορθογωνική πλάκα διαστάσεων $L \times 2W$, με πηγή θερμότητας (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.24) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.25α) και (3.2.25β):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.24)$$

$$T(x = 0) = 0, \quad T(x = L) = 0 \quad (3.2.25\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad T(y = W) = 0, \quad (3.2.25\beta)$$

το οποίο επιλύεται στο διάστημα $0 < y < W$, λόγω συμμετρίας στη διεύθυνση y . Παρατηρείται πως ενώ οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς, η διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.24) είναι μη ομογενής λόγω της πηγής θερμότητας $\dot{g}$. Επομένως το πρόβλημα είναι μη ομογενές, και επιλύεται με την μέθοδο της υπέρθεσης, μέσω της κατάτμησής του σε ένα πρόβλημα με ομογενή μερική διαφορική εξίσωση, ως προς $\Psi(x, y)$ και ένα με μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς $\Phi(x)$ η οποία περιλαμβάνει τον όρο $\frac{\dot{g}}{k}$. Η ανάλυση αυτή περιγράφεται από την Εξ. (3.2.26):

$$T(x, y) = \Psi(x, y) + \Phi(x) \quad (3.2.26)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να γίνει υπέρθεση των συνοριακών συνθηκών. Για να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη (3.2.25α), για $x = 0$, από την Εξ. (3.2.26), πρέπει:

$$T(x=0) = \Psi(x=0) + \Phi(x=0) = 0 \quad (3.2.27)$$

ενώ για $x = L$ πρέπει:

$$T(x=L) = \Psi(x=L) + \Phi(x=L) = 0 \quad (3.2.28)$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη (3.2.25β), για $y = 0$, πρέπει:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=0} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

όμως $\Phi = \Phi(x) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, άρα:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.2.29)$$

Τέλος, για $y = W$ προκύπτει:

$$T(y=W) = \Psi(y=W) + \Phi(x) = 0 \quad (3.2.30)$$

η οποία επαληθεύεται όταν $\Psi(y=W) = -\Phi(x)$.

Το πρόβλημα με γενική λύση τη $\Phi(x)$, περιγράφεται από τη συνήθη διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.31) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.32):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.2.31)$$

$$\Phi(x=0) = 0, \quad \Phi(x=L) = 0 \quad (3.2.32)$$

Αντίστοιχα το πρόβλημα με γενική λύση την $\Psi(x, y)$, περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση Laplace) Εξ. (3.2.33) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.34α) και (3.2.34β) ως

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W \quad (3.2.33)$$

$$\Psi(x=0) = 0, \quad \Psi(x=L) = 0 \quad (3.2.34\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \Psi(y=W) = -\Phi(x) \quad (3.2.34\beta)$$

Σημειώνεται πως εάν είχε επιλεγεί $\Phi = \Phi(y)$, τότε οι συνοριακές συνθήκες (3.2.34α), θα έπρεπε να περιείχαν και τη $\Phi(y)$, με αποτέλεσμα να είναι μη ομογενείς. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί με τη μέθοδο της υπέρθεσης.

Η Εξ. (3.2.31) είναι μια μη ομογενής εξίσωση δευτέρας τάξης, η λύση της οποία δίνεται από την Εξ. (3.2.35) ως

$$\Phi(x) = -\frac{\dot{g}}{2k} x^2 + A_1 x + A_2 \quad (3.2.35)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.2.32) για $x = 0$, προκύπτει:

$$\Phi(x=0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0,$$

ενώ για $x = L$:

$$\Phi(x = L) = 0 \Rightarrow -\frac{\dot{q}}{2k}L^2 + A_1L = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{\dot{q}}{2k}L$$

Αντικαθιστώντας τα A_1 και A_2 στην Εξ. (3.2.35) προκύπτει η γενική λύση $\Phi(x)$ ως

$$\Phi(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}}{2k}Lx = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (3.2.36)$$

Η Εξ. (3.2.33) επιλύεται με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών θεωρώντας

$$\Psi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.2.37)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.2.37) στην (3.2.33), προκύπτει:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2, \quad (3.2.38)$$

και

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2X = 0, \quad (3.2.39)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2Y = 0, \quad (3.2.40)$$

με τις γενικές τους λύσεις

$$X(x) = A_3 \cos \lambda x + A_4 \sin \lambda x \quad (3.2.41)$$

$$Y(y) = A_5 e^{\lambda y} + A_6 e^{-\lambda y} \quad (3.2.42)$$

Με αντικατάσταση της (3.2.34α), για $x = 0$, στην Εξ. (3.1.41) προκύπτει:

$$X(x = 0) = 0 \Rightarrow A_3 \cos \lambda \cdot 0 + A_4 \sin \lambda \cdot 0 \Rightarrow A_3 = 0$$

ενώ για $x = L$:

$$X(x = L) = 0 \Rightarrow A_4 \sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{για } n = 1, 2, \dots \quad (3.2.43)$$

Στη συνέχεια αντικαθίσταται η Εξ. (3.2.4) στην (3.2.34β), για $y = 0$, και προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow A_5 \lambda e^{\lambda \cdot 0} - A_6 \lambda e^{-\lambda \cdot 0} = 0 \Rightarrow A_5 = A_6$$

και η Εξ. (3.2.42) γράφεται ως

$$Y = A_5 (e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}) = 2A_5 \cosh \lambda y \quad (3.2.44)$$

Η γενική λύση $\Psi(x, y)$ γράφεται ως γινόμενο των λύσεων $X(x)$ και $Y(y)$:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2A_4 \sin \lambda_n x A_5 \cosh \lambda_n y \\ \Rightarrow \Psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \cosh \lambda_n y \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

όπου $A_n = 2A_4A_5$. Για τον προσδιορισμό του συντελεστή A_n εφαρμόζεται η μη ομογενής συνθήκη (3.2.34β) για $y = W$ ως εξής:

$$-\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \cosh \lambda_n W \quad (3.2.46)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας εφαρμόζεται το $\int_{x=0}^L \sin \lambda_p x dx$ και στα δύο μέλη της Εξ. (3.2.46), και για $n = p$ προκύπτει το A_n ως

$$A_n = \frac{-\int_{x=0}^L \Phi(x) \sin \lambda_n x dx}{\cosh \lambda_n W \int_{x=0}^L \sin^2 \lambda_n x dx} \quad (3.2.47)$$

Τελικά η γενική λύση του αρχικού προβλήματος, $T(x, y)$ προκύπτει από την υπέρθεση των Εξ. (3.2.36) και (3.2.45) ως

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin \lambda_n x \cosh \lambda_n y] + \frac{\dot{g}}{2k} L^2 \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (3.2.48)$$

3.2.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Τα προβλήματα στις κυλινδρικές συντεταγμένες τα οποία περιλαμβάνουν μη ομογενή διαφορική εξίσωση ή μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες, επιλύονται με τη μέθοδο της υπέρθεσης ακολουθώντας την ίδια λογική με αυτή στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Παρακάτω επιλύεται ένα παράδειγμα με μη ομογενή μερική διαφορική εξίσωση λόγω εσωτερικής παραγωγής θερμότητας.

$T(r, z)$ με Πηγή Θερμότητας

Έστω στερεός κύλινδρος ακτίνας b και μήκους L , στον οποίο η θερμότητα μεταδίδεται κατά τις διευθύνσεις r και z . Η επιφάνεια $r = b$ βρίσκεται σε θερμοκρασία $T(r = b) = F(z)$, ενώ οι επιφάνειες $z = 0$ και $z = L$ διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία. Η εσωτερική παραγωγή θερμότητας δίνεται ίση με $\dot{g}$.

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από τη μη ομογενή μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.49) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.50α), και (3.2.50β) ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0, \quad 0 \leq r < b, \quad 0 < z < L \quad (3.2.49)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(r = b) = F(z) \quad (3.2.50\alpha)$$

$$T(z = 0) = 0, \quad T(z = L) = 0 \quad (3.2.50\beta)$$

με τη συνοριακή συνθήκη (3.2.50α) να υποδηλώνει συμμετρία για $r = 0$.

Σύμφωνα με τη μέθοδο της υπέρθεσης η θερμοκρασία $T(r, z)$ περιγράφεται από την Εξ. (3.2.51) ως

$$T(r, z) = \Psi(r, z) + \Phi(z) \quad (3.2.51)$$

όπου $\Psi(r, z)$ η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή χωρίς τον όρο $\frac{\dot{q}}{k}$) και $\Phi(z)$ η λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Η μεταβλητή Φ έχει επιλεγεί να εξαρτάται από τη μεταβλητή z , λόγω της συνοριακής συνθήκης (3.2.50α), για $r = 0$, καθώς τότε η παράγωγος της Φ ως προς r είναι μηδέν. Επίσης αν $\Phi = \Phi(r)$ τότε οι συνοριακές συνθήκες στις επιφάνειες $z = 0$ και $z = L$, θα ήταν μη ομογενείς.

Το πρόβλημα με γενική λύση την $\Psi(r, z)$ αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (3.2.52) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.53α), και (3.2.53β):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2.52)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \Psi(r = b) = F(z) - \Phi(z) = g(z) \quad (3.2.53\alpha)$$

$$\Psi(z = 0) = 0, \quad \Psi(z = L) = 0 \quad (3.2.53\beta)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, θεωρείται πως η $\Psi(r, z)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και Z , η κάθε μία από τις οποίες είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής r και z αντίστοιχα, σύμφωνα με την Εξ. (3.2.54) ως

$$\Psi(r, z) = R(r)Z(z) \quad (3.2.54)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (3.2.54) στην Εξ. (3.2.52), και τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$, προκύπτουν οι Εξ. (3.2.55) και (3.2.56):

$$\begin{aligned} Z \frac{d^2 R}{dr^2} + Z \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) &= -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2 \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + Z\lambda^2 = 0 \quad (3.2.56)$$

όπου λ^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η γενική λύση της (3.2.56) δίνεται από την Εξ. (3.2.57) ως

$$Z(z) = A_1 \cos \lambda z + A_2 \sin \lambda z \quad (3.2.57)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη για $z = 0$, προκύπτει ότι $A_1 = 0$, ενώ για $z = L$:

$$\begin{aligned} Z(z = L) = 0 &\Rightarrow A_2 \sin \lambda L = 0 \Rightarrow \sin \lambda L = 0 \\ \Rightarrow \lambda_n &= \frac{n\pi}{L} \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

όπου $\lambda_0 = 0$ η τετριμμένη λύση. Διαχωρίζοντας τον όρο $R(r)$ της Εξ. (3.2.55) προκύπτει η Εξ. (3.2.59) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0 \quad (3.2.59)$$

η οποία είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ (βλέπε Παράρτημα Β). Η λύση της Εξ. (3.2.59) δίνεται από την Εξ. (3.2.60) ως

$$R(r) = A_3 I_0(\lambda r) + A_4 K_0(\lambda r) \quad (3.2.60)$$

όπου I_0 και K_0 οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.2.53α) για $r = 0$ προκύπτει ότι:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow A_3 I_1(0) - A_4 \lambda K_1(0) = 0$$

όπου $I_1(0) = 0$ και $K_1(r \rightarrow 0) \rightarrow +\infty$. Άρα θα πρέπει ο συντελεστής A_4 να ισούται με μηδέν. Η Εξ. (3.2.60) γράφεται ως

$$R(r) = A_3 I_0(\lambda r) \quad (3.2.61)$$

Πολλαπλασιάζοντας και κατόπιν αθροίζοντας τις λύσεις $Z(z)$ και $R(r)$, προκύπτει η γενική λύση $\Psi(r, z)$ ως

$$\Psi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z \quad (3.2.62)$$

όπου $A_n = A_2 A_3$. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.2.53α) για $r = b$ η Εξ. (3.2.62) γίνεται:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(\lambda_n b) \sin \lambda_n z \quad (3.2.63)$$

Το A_n υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας του $\sin \lambda_n z$, με την εφαρμογή του $\int_{z=0}^L \sin \lambda_p z \sin \lambda_n z dz$ στα δύο μέλη της Εξ. (3.2.63), και για $p = n$ το A_n δίνεται από την Εξ. (3.2.64):

$$A_n = \frac{\int_{z=0}^L g(z) \sin \lambda_n z dz}{I_0(\lambda_n b) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz} \quad (3.2.64)$$

Το μη ομογενές πρόβλημα με λύση την $\Phi(z)$, περιγράφεται από την Εξ. (3.2.65) και τις συνοριακές συνθήκες (3.2.66):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0, \quad 0 < z < L \quad (3.2.65)$$

$$\Phi(z = 0) = 0, \quad \Phi(z = L) = 0 \quad (3.2.66)$$

Η λύση του προβλήματος είναι ίδια με την Εξ. (3.2.36):

$$\Phi(z) = \frac{\dot{q}}{2k} L^2 \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] \quad (3.2.67)$$

Τελικά η ζητούμενη θερμοκρασία $T(r, z)$ δίνεται από την Εξ. (3.2.68) ως υπέρθεση των Εξ. (3.2.62) και (3.2.67):

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z + \frac{\dot{q}}{2k} L^2 \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] \quad (3.2.68)$$

3.2.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

$T = T(r, \mu)$ Ημισφαίριο με Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες

Έστω ημισφαίριο με $0 \leq r < b$ και $0 \leq \mu \leq 1$, στο οποίο η συνοριακή επιφάνεια βρίσκεται σε θερμοκρασία $T(r = b) = F(\mu)$, ενώ η βάση $\mu = 0$ διατηρείται σε θερμοκρασία $T(\mu = 0) = T_0$.

Το πρόβλημα περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) = 0 \quad 0 \leq r < b, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (3.2.69)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad T(r = b) = F(\mu) \quad (3.2.70\alpha)$$

$$T(\mu \rightarrow +1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad T(\mu = 0) = T_0 \quad (3.2.70\beta)$$

Παρατηρείται πως δύο συνοριακές συνθήκες είναι μη ομογενείς, επομένως δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Θεωρείται μια νέα μεταβλητή $\Phi(r, \mu) = T(r, \mu) - T_0$, η οποία απαλείφει τη μη ομογενή συνοριακή συνθήκη $T(\mu = 0) = T_0$.

Το πρόβλημα με γενική λύση τη $\Phi(r, \mu)$ διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) = 0, \quad 0 \leq r < b, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (3.2.71)$$

$$\Phi(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad \Phi(r = b) = F(\mu) - T_0 = G(\mu) \quad (3.2.72\alpha)$$

$$\Phi(\mu \rightarrow +1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad \Phi(\mu = 0) = 0 \quad (3.2.72\beta)$$

Η θερμοκρασία $\Phi(r, \mu)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και M , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από την μεταβλητή r και μ αντίστοιχα, και εκφράζεται από την Εξ. (3.2.73) ως

$$\Phi(r, \mu) = R(r)M(\mu) \quad (3.2.73)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.2.73) στην Εξ. (3.2.71), και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $M(\mu)$, προκύπτουν:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial M}{\partial \mu} \right) = n(n+1) \quad (3.2.74)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + n(n+1)M = 0 \quad (3.2.75)$$

όπου $n(n+1)$ μια σταθερά διαχωρισμού. Η λύση της Εξ. (3.2.75) δίνεται από την Εξ. (3.2.76) ως

$$M(\mu) = A_1 P_n(\mu) + A_2 Q_n(\mu) \quad (3.2.76)$$

όπου $P_n(\mu)$ και $Q_n(\mu)$ τα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους, για $n = 0, 1, 2, \dots$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.2.70β) για $\mu \rightarrow +1$, απαλείφεται ο όρος $A_2 Q_n(\mu)$, καθώς $Q_n(\mu) \rightarrow \infty$ για $\mu = \pm 1$. Επομένως $A_2 = 0$ και η Εξ. (3.2.76) εκφράζεται πλέον από την Εξ. (3.2.77)

$$M(\mu) = A_1 P_n(\mu) \quad (3.2.77)$$

Για $\mu = 0$ ισχύει:

$$M(\mu = 0) = 0 \Rightarrow A_1 P_n(\mu) = 0 \Rightarrow P_n(\mu) = 0 \rightarrow n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2.78)$$

Διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $R(r)$ στην Εξ. (3.2.74), προκύπτει η Εξ. (3.2.79) ως

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (3.2.79)$$

η οποία είναι η εξίσωση Cauchy-Euler. Για την επίλυσή της, θεωρείται ότι

$$\omega = \ln(r) \rightarrow r = e^\omega \quad (3.2.80\alpha)$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\omega} \frac{d\omega}{dr} = \frac{dR}{d\omega} \frac{1}{r} \quad (3.2.80\beta)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\omega^2} \frac{1}{r^2} - \frac{dR}{d\omega} \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\omega^2} - \frac{dR}{d\omega} \quad (3.2.80\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (3.2.80α), (3.2.80β) και (3.2.80γ) στην Εξ. (3.2.79) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\omega^2} - \frac{dR}{d\omega} + 2 \frac{dR}{d\omega} - n(n+1)R &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 R}{d\omega^2} + \frac{dR}{d\omega} - n(n+1)R &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.81)$$

Η Εξ. (3.2.81) είναι μια ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Οι χαρακτηριστικές ρίζες της είναι $R_1(\omega) = n$ και $R_2(\omega) = -(n+1)$. Επομένως η γενική λύση της Εξ. (3.2.81) δίνεται από την Εξ. (3.2.82) ως

$$R(r) = A_3 r^n + A_4 r^{-(n+1)} \quad (3.2.82)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (3.2.72α) για $r \rightarrow 0$, απαλείφεται ο όρος $A_4 r^{-(n+1)}$, καθώς $r^{-(n+1)} \rightarrow \infty$. Επομένως, πρέπει $A_4 = 0$, και η Εξ. (3.2.82) γράφεται ως

$$R(r) = A_3 r^n \quad (3.2.83)$$

Τελικά η θερμοκρασία $\Phi(r, \mu)$ ισούται με το γινόμενο των Εξ. (3.2.77) και (3.2.83):

$$\begin{aligned} \Phi(r, \mu) &= A_3 r^n A_1 P_n(\mu) \\ \Rightarrow \Phi(r, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \quad \text{για } n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

με $A_n = A_1 A_3$. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς A_n , εφαρμόζεται στην Εξ. (3.2.84) η μη ομογενής συνοριακή συνθήκη (3.2.60α), για $r = b$, και προκύπτει η Εξ. (3.2.85) ως

$$\Phi(r = b) = G(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\mu) \quad (3.2.85)$$

Στη συνέχεια γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre, με την εφαρμογή του $\int_{\mu=0}^1 P_k(\mu) d\mu$, με $k = 1, 3, 5, \dots$, και στα δύο μέλη της Εξ. (3.2.85), δεδομένου ότι $\int_{\mu=0}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \neq 0$ για $n = k$, και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{\mu=0}^1 G(\mu) P_k(\mu) d\mu &= \int_{\mu=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^n P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu \\ \Rightarrow A_n &= \frac{\int_{\mu=0}^1 G(\mu) P_n(\mu) d\mu}{b^n \int_{\mu=0}^1 P_n^2(\mu) d\mu} \end{aligned} \quad (3.2.86)$$

Τελικά η ζητούμενη θερμοκρασία $T(r, \mu)$ δίνεται από την Εξ. (3.2.87) ως

$$T(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) + T_0 \quad (3.2.87)$$

3.3 Η Μέθοδος της Θερμικής Αντίστασης

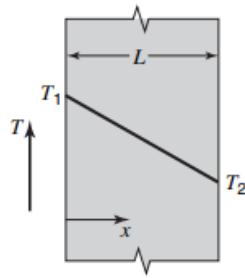
Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται αρχικά η έννοια της θερμικής αντίστασης για απλές γεωμετρίες. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία έχει εφαρμογή σε προβλήματα κυρίως μονοδιάστατης ροής θερμότητας, χωρίς πηγή θερμότητας. Στη συνέχεια περιγράφεται πώς η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται για την επίλυση γεωμετριών, αποτελούμενων από διάφορα στρώματα.

3.3.1 Η Έννοια της Θερμικής Αντίστασης σε Τοίχωμα

Ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας σε ένα τοίχωμα εμβαδού A και πάχους L , όπως στο Σχήμα 3.3.1, δίνεται από την σχέση

$$q = kA \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (3.3.1)$$

όπου T_1 και T_2 , οι σταθερές θερμοκρασίες στις δύο επιφάνειες του τοιχώματος αντίστοιχα.



Σχήμα 3.3.1: Μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε τοίχωμα (Welty et al., 2019).

Η Εξ. (3.3.1) μπορεί να γραφεί ως

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_{wall}} \quad (3.3.2)$$

όπου

$$R_{wall} = \frac{L}{kA} \text{ (K/W)} \quad (3.3.3)$$

η θερμική αντίσταση της επιφάνειας στην αγωγή θερμότητας, ή αντίσταση αγωγής, του τοιχώματος. Από την Εξ. (3.3.3), παρατηρείται πως η θερμική αντίσταση εξαρτάται από τη γεωμετρία του μέσου και τις θερμικές του ιδιότητες. Εκφράζει τον λόγο της διαφοράς ΔT προς τον αντίστοιχο ρυθμό μετάδοσης θερμότητας q . Το αντίστροφο της θερμικής αντίστασης $\frac{1}{R_{wall}} = \frac{kA}{L}$ (thermal conductance), είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του μέσου.

Η θερμότητα από ένα στερεό μέσο, εμβαδού επιφάνειας A_s και θερμοκρασίας T_s , μεταδίδεται από, ή προς, ένα ρευστό θερμοκρασίας T_∞ μέσω συναγωγής, σύμφωνα με τη σχέση

$$q_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (3.3.4)$$

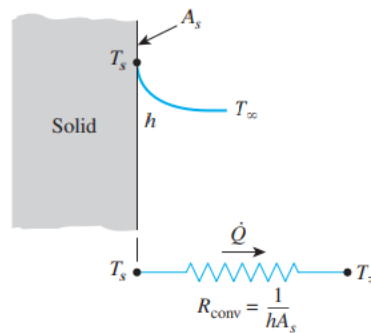
όπου h ο συντελεστής συναγωγής. Η Εξ. (3.3.4) μπορεί να αναδιαταχθεί και να γραφεί ως

$$q_{conv} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{conv}} \quad (3.3.5)$$

όπου

$$R_{conv} = \frac{1}{hA_s} \text{ (K/W)} \quad (3.3.6)$$

η αντίσταση συναγωγής, η οποία υποδηλώνει τη θερμική αντίσταση της επιφάνειας στη μετάδοση θερμότητας με συναγωγή, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3.2. Από την Εξ. (3.3.6), παρατηρείται πως όταν $h \rightarrow \infty$, η αντίσταση συναγωγής, R_{conv} , μηδενίζεται. Επομένως, η μετάδοση θερμότητας επιταχύνεται με την απουσία της αντίστασης, με αποτέλεσμα $T_s \approx T_\infty$.



Σχήμα 3.3.2: Αντίσταση συναγωγής σε επιφάνεια (Cengel, 2015).

Εξίσου σημαντική είναι και η ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ ενός σώματος και του περιβάλλοντος μέσου, μέσω ακτινοβολίας. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταδίδεται η θερμότητα ανάμεσα σε ένα στερεό μέσο επιφάνειας A_s , ικανότητας εκπομπής ε , με θερμοκρασία T_s και του εξωτερικού περιβάλλοντος, το οποίο βρίσκεται σε θερμοκρασία T_{surr} , δίνεται ως

$$q_{rad} = \varepsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{surr}^4)$$

ή

$$q_{rad} = h_{rad} A_s (T_s - T_{surr}) \quad (3.3.7)$$

όπου h_{rad} ο συντελεστής ακτινοβολίας. Η Εξ. (3.3.7) μπορεί να γραφεί και ως

$$q_{rad} = \frac{T_s - T_{surr}}{R_{rad}} \quad (3.3.8)$$

όπου

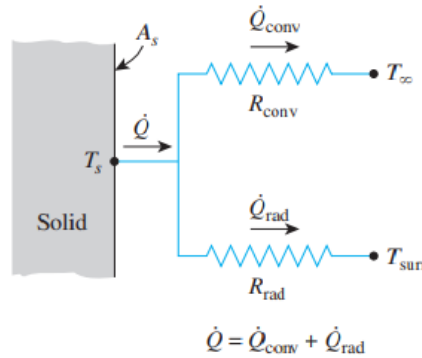
$$R_{rad} = \frac{1}{h_{rad} A_s} \text{ (K/W)} \quad (3.3.9)$$

η αντίσταση ακτινοβολίας.

Στην πραγματικότητα, στις επιφάνειες οι οποίες εκτίθενται στον εξωτερικό αέρα η μετάδοση θερμότητας επιτυγχάνεται με συναγωγή και ακτινοβολία ταυτόχρονα. Σε αυτή την περίπτωση οι αντιστάσεις είναι παράλληλες μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.3.

Επίσης, για $T_{surr} \approx T_{\infty}$ ο συντελεστής h οποίος θα χρησιμοποιηθεί στην Εξ. (3.3.9) για τον υπολογισμό του ρυθμού μετάδοσης θερμότητας, προκύπτει από το άθροισμα των συντελεστών ακτινοβολίας και συναγωγής, ως

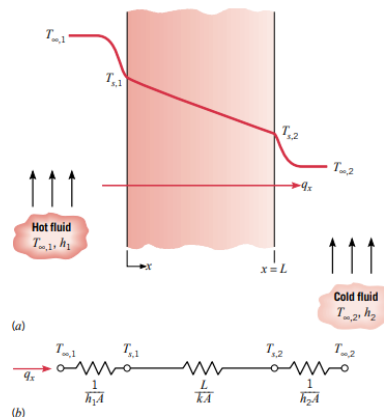
$$h = h_{conv} + h_{rad} \quad (\text{W/m}^2\text{K}) \quad (3.3.10)$$



Σχήμα 3.3.3: Αντιστάσεις αγωγής και ακτινοβολίας σε μια επιφάνεια (Cengel, 2015).

Πολυστρωματικά Τοιχώματα

Έστω τοίχωμα πάχους L και εμβαδού A . Η θερμότητα μεταδίδεται με συναγωγή από ένα ρευστό θερμοκρασίας $T_{\infty,1}$, με συντελεστή h_1 , προς τη μία επιφάνεια του τοιχώματος με θερμοκρασία $T_{s,1}$. Στη συνέχεια, μέσω αγωγής, η θερμότητα μεταδίδεται από την επιφάνεια στη θέση $x = 0$, προς την επιφάνεια $x = L$ του τοιχώματος, η οποία βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_{s,2}$. Τέλος, με τη διαδικασία της συναγωγής, γίνεται μεταφορά θερμότητας από την επιφάνεια προς το ρευστό θερμοκρασίας $T_{\infty,2}$, και συντελεστή h_2 . Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3.4.



Σχήμα 3.3.4: α) Μετάδοση θερμότητας σε έναν τοίχο β) θερμικές αντιστάσεις (Bergman, 2011).

Ο συνολικός ρυθμός θερμότητας προκύπτει από το ισοζύγιο ενέργειας ως

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{θερμότητα που εισέρχεται στο τοίχωμα} \\ \text{μέσω συναγωγής} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \text{αγωγή θερμότητας} \\ \text{στο τοίχωμα} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{θερμότητα που εξέρχεται από το τοίχωμα} \\ \text{μέσω συναγωγής} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ή

$$q = h_1 A (T_{\infty,1} - T_1) = k A \frac{T_1 - T_2}{L} = h_2 A (T_2 - T_{\infty,2}) \quad (3.3.11)$$

και μπορεί να γραφεί ως

$$q = \frac{(T_{\infty,1} - T_1)}{R_{conv,1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{wall}} = \frac{(T_2 - T_{\infty,2})}{R_{conv,2}} \quad (3.3.12)$$

Από την τελευταία προκύπτει:

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{total}} \quad (3.3.13)$$

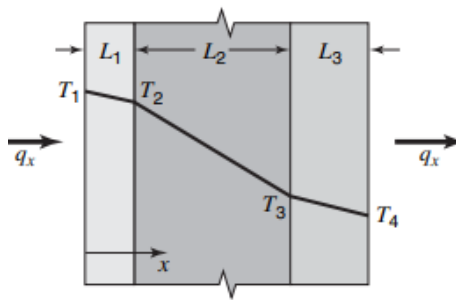
με

$$R_{total} = R_{conv,1} + R_{wall} + R_{conv,2} \quad (3.3.14)$$

Η Εξ. (3.3.14) υποδηλώνει πως ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης θερμότητας ανάμεσα σε δύο επιφάνειες ισούται με τη διαφορά θερμοκρασίας τους ως προς τη συνολική θερμική αντίσταση των επιφανειών. Μια άλλη παρατήρηση που μπορεί να εξαχθεί, είναι ότι η διαφορά, ή πτώση, θερμοκρασίας είναι ίση με τον συνολικό ρυθμό μετάδοσης θερμότητας επί τη θερμική αντίσταση. Τέλος, η συνολική θερμική αντίσταση υπολογίζεται και από τη σχέση

$$R_{total} = \frac{1}{UA} \quad (3.3.15)$$

με U τον συντελεστή της συνολικής μετάδοσης θερμότητας, με μονάδα μέτρησης το W/m^2K . Τα τοιχώματα που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, αποτελούνται συνήθως από στρώματα διαφορετικών υλικών. Το κάθε υλικό έχει διαφορετικές θερμικές ιδιότητες, επομένως και διαφορετικές θερμικές αντιστάσεις. Έστω το τοίχωμα του Σχήματος 3.3.5, ο οποίος αποτελείται από τρία στρώματα με διαφορετικά μήκη, καθώς και διαφορετικές τιμές συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Η τιμή του ρυθμού μετάδοσης της θερμότητας υπολογίζεται από την Εξ. (3.3.13), στην οποία το R_{total} , είναι το άθροισμα των αντιστάσεων των επιμέρους στρωμάτων.



Σχήμα 3.3.5: Μετάδοση θερμότητας σε πολυστρωματικό τοίχωμα με τα αντίστοιχα πάχη των στρωμάτων (Welty et al., 2019).

Στο παράδειγμα του Σχήματος 3.3.5, οι επιφάνειες των στρωμάτων είναι λείες και η επαφή μεταξύ τους θεωρείται ιδεατή. Οι θερμοκρασίες, λοιπόν, στο σημείο επαφής μεταξύ των δύο επιφανειών είναι ίσες και στις δύο επιφάνειες. Ωστόσο, οι επιφάνειες, τις περισσότερες φορές εμφανίζουν μια τραχύτητα, και η επαφή πλέον, δεν είναι τέλεια. Στη διεπιφάνεια μεταξύ δύο επιφανειών δημιουργούνται κενά, αποτελούμενα κυρίως από αέρα. Λόγω της χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας του αέρα η θερμική αντίσταση αυξάνεται, με αποτέλεσμα η διεπιφάνεια να λειτουργεί ως μόνωση. Η θερμική αντίσταση του αέρα ονομάζεται θερμική αντίσταση επαφής R_c , και ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας μεταξύ δύο επιφανειών υπολογίζεται ως

$$q = h_c A \Delta T_{interface} \quad (3.3.16)$$

με h_c τη θερμική αγωγιμότητα επαφής, A το εμβαδό της διεπιφάνειας, και $\Delta T_{interface}$ τη διαφορά θερμοκρασίας στο σημείο της επαφής των επιφανειών. Η θερμική αντίσταση επαφής υπολογίζεται ως

$$R_c = \frac{1}{h_c} \quad (3.3.17)$$

3.3.2 Θερμική Αντίσταση σε Κύλινδρο και Σφαίρα

Έστω κύλινδρος μεγάλου μήκους όπως στο Σχήμα 3.3.6 με εσωτερική ακτίνα r_1 , εξωτερική ακτίνα r_0 , μήκος L , και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k . Η εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου διατηρούνται σε σταθερές θερμοκρασίες $T_{s,1}$ και $T_{s,0}$, αντίστοιχα. Ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας με αγωγή υπολογίζεται ως

$$q = -kA \frac{dT}{dr} \quad (3.3.18)$$

όπου $A = 2\pi rL$, το εμβαδό του κυλίνδρου σε ακτίνα r . Με ολοκλήρωση της Εξ. (3.3.18), από r_1 έως r_0 , και από $T_{s,1}$ έως $T_{s,0}$, και δεδομένου ότι η ροή θερμότητας είναι σταθερή και το εμβαδό A εξαρτάται από την ακτίνα r , προκύπτει

$$q = 2\pi Lk \frac{T_{s,1} - T_{s,0}}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} \quad (3.3.19)$$

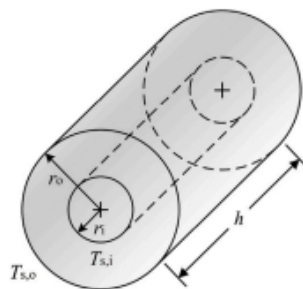
ή

$$q = \frac{T_{s,1} - T_{s,0}}{R_{cyl}}, \quad (3.3.20)$$

όπου

$$R_{cyl} = \frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)}{2\pi Lk} \quad (3.3.21)$$

η θερμική αντίσταση του κυλίνδρου σε αγωγή.



Σχήμα 3.3.6: Κύλινδρος εσωτερικής ακτίνας r_1 και θερμοκρασίας $T_{s,1}$ (Hirbodi & Jafarpur, 2020).

Έστω μονοδιάστατη και σταθερή ροή θερμότητας σε σφαίρα με εσωτερική και εξωτερική ακτίνα r_1 και r_0 , και θερμοκρασίες $T_{s,1}$ και $T_{s,0}$, αντίστοιχα. Το εμβαδό της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο είναι $A = 4\pi r^2$. Με ολοκλήρωση της Εξ. (3.3.18) από r_1 έως r_0 , και από $T_{s,1}$ έως $T_{s,0}$, προκύπτει ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας ως

$$q = \frac{4\pi k(T_{s,1} - T_{s,0})}{\left(\frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_0}\right)} \quad (3.3.22)$$

ή

$$q = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{R_{sph}}, \quad (3.3.23)$$

όπου

$$R_{sph} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} \quad (3.3.24)$$

η θερμική αντίσταση της σφαίρας σε αγωγή.

3.4 Μετάδοση θερμότητας σε σύνθετες γεωμετρίες - Παράγοντας S

Ως τώρα έχουν μελετηθεί γεωμετρίες, όπως το τοίχωμα, ο κύλινδρος μεγάλου μήκους, και η σφαίρα, στις οποίες η ροή θερμότητας θεωρείται μονοδιάστατη. Στην πράξη ωστόσο, πολλά προβλήματα αποτελούνται από σύνθετες γεωμετρίες, στις οποίες η ροή μπορεί να είναι είτε διδιάστατη είτε τριδιάστατη, με την επίλυσή τους να είναι πολύπλοκη.

Απλές λύσεις για τέτοιες γεωμετρίες, μπορούν να εξαχθούν μόνο στην περίπτωση που οι επιφάνειες των σωμάτων διατηρούνται σε σταθερές θερμοκρασίες και η μετάδοση θερμότητας μεταξύ των επιφανειών επιτυγχάνεται μέσω της αγωγής, χωρίς παραγωγή θερμότητας. Τότε, ο ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας υπολογίζεται ως

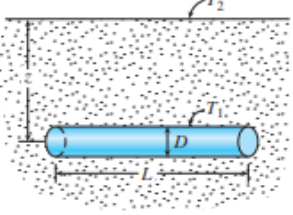
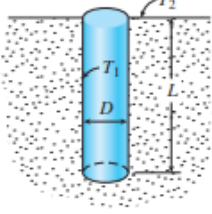
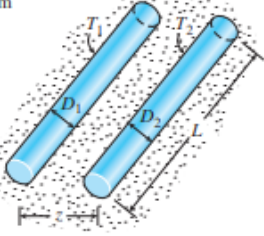
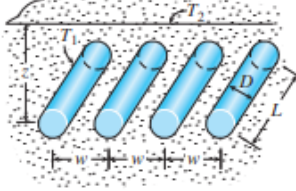
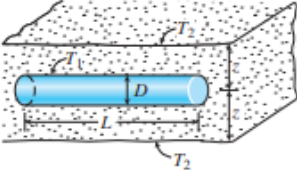
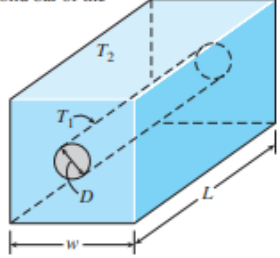
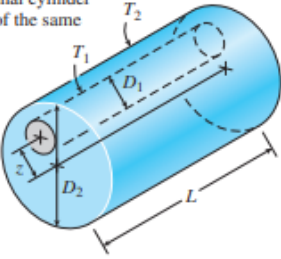
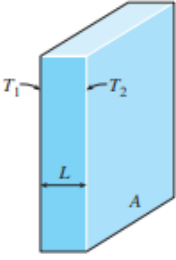
$$q = Sk(T_1 - T_2) \quad (3.4.1)$$

όπου T_1 , T_2 , οι σταθερές θερμοκρασίες δύο επιφανειών, και S ο παράγοντας σχήματος αγωγιμότητας, ο οποίος εξαρτάται από τη γεωμετρία του μέσου και έχει μονάδες μήκους (Cengel, 2015).

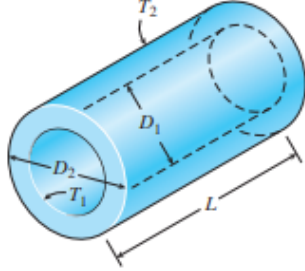
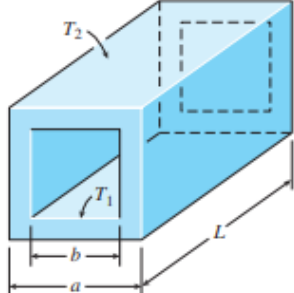
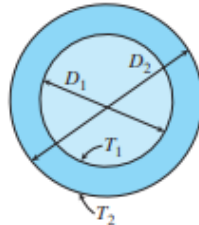
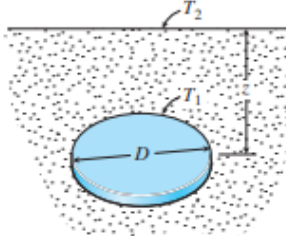
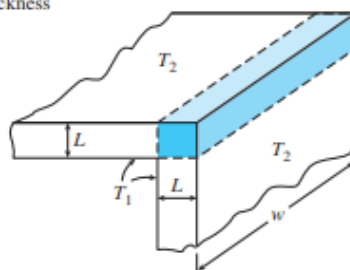
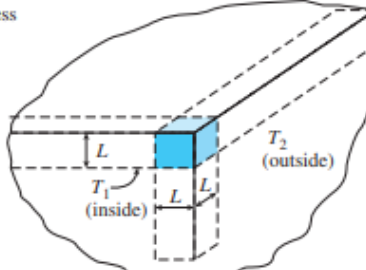
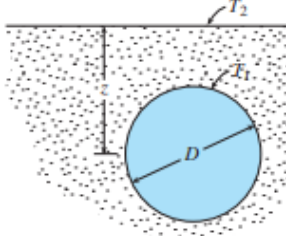
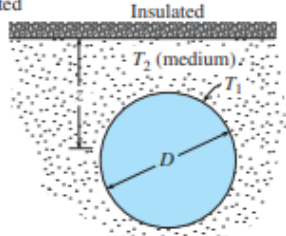
Ο παράγοντας S έχει προσδιοριστεί για διάφορες γεωμετρίες οι οποίες συναντώνται στην πράξη, και παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.4.1α και 3.4.1β. Από την Εξ. (3.4.1) παρατηρείται πως για τον παράγοντα S ισχύει:

$$S = \frac{1}{kR} = \frac{A}{L} \quad (3.4.2)$$

 Πίνακας 3.4.1α: Παράγοντας S για διάφορες γεωμετρίες (Cengel, 2015).

(1) Isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium ($L \gg D$ and $z > 1.5D$) $S = \frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$ 	(2) Vertical isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium ($L \gg D$) $S = \frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$ 
(3) Two parallel isothermal cylinders placed in an infinite medium ($L \gg D_1, D_2, z$) $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1} \left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2} \right)}$ 	(4) A row of equally spaced parallel isothermal cylinders buried in a semi-infinite medium ($L \gg D, z$, and $w > 1.5D$) $S = \frac{2\pi L}{\ln \left(\frac{2w}{\pi D} \sinh \frac{2\pi z}{w} \right)}$ (per cylinder) 
(5) Circular isothermal cylinder of length L in the midplane of an infinite wall ($z > 0.5D$) $S = \frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$ 	(6) Circular isothermal cylinder of length L at the center of a square solid bar of the same length $S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$ 
(7) Eccentric circular isothermal cylinder of length L in a cylinder of the same length ($L > D_2$) $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1} \left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1D_2} \right)}$ 	(8) Large plane wall $S = \frac{A}{L}$ 

Πίνακας 3.4.1β: Παράγοντας S για διάφορες γεωμετρίες (Cengel, 2015).

(9) A long cylindrical layer $S = \frac{2\pi L}{\ln(D_2/D_1)}$ 	(10) A square flow passage (a) For $a/b > 1.4$, $S = \frac{2\pi L}{0.93 \ln(0.948 a/b)}$ (b) For $a/b < 1.4$, $S = \frac{2\pi L}{0.785 \ln(a/b)}$ 
(11) A spherical layer $S = \frac{2\pi D_1 D_2}{D_2 - D_1}$ 	(12) Disk buried parallel to the surface in a semi-infinite medium ($z \gg D$) $S = 4D$ ($S = 2D$ when $z = 0$) 
(13) The edge of two adjoining walls of equal thickness $S = 0.54 w$ 	(14) Corner of three walls of equal thickness $S = 0.15 L$ 
(15) Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium $S = \frac{2\pi D}{1 - 0.25D/z}$ 	(16) Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium at T_2 whose surface is insulated $S = \frac{2\pi D}{1 + 0.25D/z}$ 

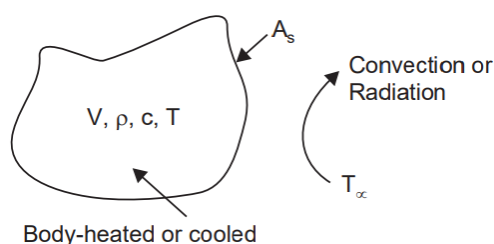
Κεφάλαιο 4 Μη Μόνιμη Μετάδοση Θερμότητας

Η θερμοκρασία των στερεών σωμάτων μεταβάλλεται με τη θέση και τον χρόνο, και η μετάδοση της θερμότητας σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται μη μόνιμη. Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε η αγωγή θερμότητας σε μόνιμες συνθήκες, κάτω από τις οποίες η θερμοκρασία δεν εξαρτώταν από τον χρόνο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει αρχικά η περιγραφή συστημάτων των οποίων η θερμοκρασία μεταβάλλεται ομοιόμορφα με τον χρόνο, τα οποία καλούνται συστήματα εντοπισμένης χωρητικότητας. Στη συνέχεια θα εξεταστεί η μη μόνιμη ροή θερμότητας, για μονοδιάστατα και πολυδιάστατα προβλήματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες, καθώς και σε ημι-άπειρα μέσα, μέσω διαφορικών εξισώσεων, και συγκεκριμένα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, με το γινόμενο λύσεων, αλλά και με τη χρήση διαγραμμάτων.

4.1 Συστήματα Εντοπισμένης Χωρητικότητας

Σε ορισμένα σώματα έχει παρατηρηθεί πως η εσωτερική θερμοκρασία μεταβάλλεται ομοιόμορφα με τον χρόνο. Δηλαδή, η θερμοκρασία είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου και όχι της θέσης. Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων συστημάτων εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε γεωμετρία, ανεξαρτήτως διαστάσεων.

Για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της θερμοκρασίας θεωρείται ένα σώμα αυθαίρετης γεωμετρίας, εμβαδού A_s , με αρχική εσωτερική σταθερή θερμοκρασία T_0 , το οποίο είναι εκτεθειμένο σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T_∞ , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1.1. Η θερμότητα μπορεί να μεταδίδεται από το περιβάλλον προς το σώμα (ή το αντίστροφο), με συναγωγή ή ακτινοβολία.



Σχήμα 4.1.1: Μετάδοση θερμότητας σε σώμα αυθαίρετης γεωμετρίας (Kothadaraman, 2006).

Σε χρονικό διάστημα dt , η θερμοκρασία του σώματος αυξάνεται (ή μειώνεται) κατά Dt . Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, ισχύει:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Θερμότητα που εισέρχεται στο σώμα} \\ \text{στο διάστημα } dt \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Αύξηση της θερμότητας του σώματος} \\ \text{στο διάστημα } dt \end{array} \right]$$

ή

$$hA_s(T_\infty - T)dt = mc_p dT \quad (4.1.1)$$

με $m = \rho V$ και $dT = (T - T_\infty)$. Επομένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{d(T-T_\infty)}{(T-T_\infty)} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p} dt \quad (4.1.2)$$

Ολοκληρώνοντας την Εξ. (4.1.2) από $t = 0$, με θερμοκρασία T_0 , έως έναν χρόνο t , στον οποίο $T = T(t)$, προκύπτει

$$\ln \frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p} t \quad (4.1.3)$$

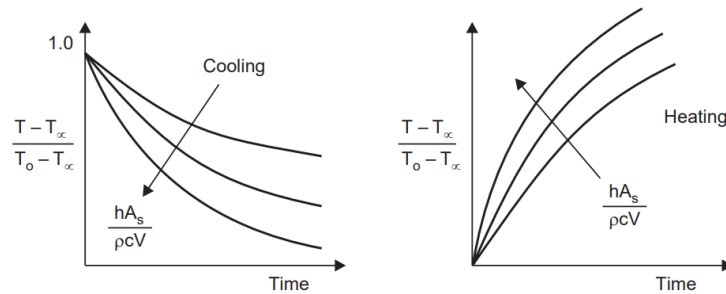
ή

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = e^{-bt}, \quad (4.1.4)$$

όπου b μια σταθερά χρόνου με μονάδα μέτρησης $1/s$, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$b = \frac{hA_s}{\rho V c_p} \quad (4.1.5)$$

Η Εξ. (4.1.4) έχει σχεδιαστεί για διάφορες τιμές του b , και στο Σχήμα 4.1.2 φαίνεται η εκθετική αύξηση ή μείωση της θερμοκρασίας. Από την Εξ. (4.1.5) παρατηρείται πως όσο μεγαλύτερη η μάζα ή η ειδική θερμότητα του σώματος, τόσο μικρότερη η τιμή της σταθεράς b . Χρειάζεται δηλαδή, περισσότερος χρόνος για να μεταφερθεί η θερμότητα.



Σχήμα 4.1.2: Πτώση ή αύξηση της θερμοκρασίας για διάφορες τιμές του b (Kothadaraman, 2006).

Αφού προσδιοριστεί η θερμοκρασία $T(t)$ σε τυχαίο χρόνο t , τότε ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί ως

$$q = hA_s [T(t) - T_{\infty}] \quad (4.1.6)$$

Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται σε συστήματα τα οποία πληρούν ορισμένα κριτήρια. Για τον καθορισμό αυτών των κριτηρίων, πρέπει να οριστεί ένα μέγεθος το οποίο ονομάζεται χαρακτηριστικό μήκος και δίνεται ως

$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad (4.1.7)$$

Ο αριθμός Biot υπολογίζεται ως

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad \text{ή} \quad Bi = \frac{\frac{L_c}{k}}{\frac{1}{h}} \quad (4.1.8)$$

Ο αριθμός Biot (στον οποίο αναφερθήκαμε στο Κεφάλαιο 3) είναι ένας αδιάστατος αριθμός, ο οποίος εκφράζει τον λόγο της εσωτερικής αντίστασης σε αγωγή θερμότητας στο σώμα, προς την αντίσταση συναγωγής στην επιφάνεια του σώματος. Όταν η τιμή του αριθμού Biot είναι μικρή, τότε η αντίσταση σε αγωγή είναι μικρή, με αποτέλεσμα να είναι μικρή και η μεταβολή της θερμοκρασίας δια του σώματος. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μέθοδος ανάλυσης των συστημάτων εντοπισμένης χωρητικότητας, απαιτεί ομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασίας σε όλο το σώμα, η οποία επιτυγχάνεται στην περίπτωση που η αντίσταση αγωγής είναι μικρή, δηλαδή όταν ο αριθμός Biot είναι μικρός.

Συγκεκριμένα, όταν $Bi = 0$, τότε η ανάλυση είναι ακριβής, ενώ όταν $Bi > 0$, η ανάλυση είναι προσεγγιστική. Συνήθως, υπάρχει μια αβεβαιότητα περίπου 15% η οποία εξακολουθεί να υπάρχει ακόμα και όταν $Bi = 0$. Για το λόγο αυτό, θεωρείται αποδεκτό η

τιμή του Bi να είναι $Bi \leq 0.1$. Όταν ικανοποιείται αυτό το κριτήριο, η μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος θεωρείται ομοιόμορφη.

4.2 Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών

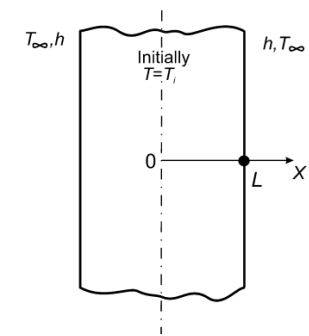
Στην ενότητα 4.1 μελετήθηκαν σώματα των οποίων η θερμοκρασία μεταβάλλεται ομοιόμορφα με τον χρόνο. Ωστόσο, τις περισσότερες φορές η θερμοκρασία μεταβάλλεται με τον χρόνο και τη θέση. Σε αυτή την ενότητα, θα επιλυθούν αρχικά μονοδιάστατα και στη συνέχεια πολυδιάστατα μη μόνιμα προβλήματα, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, με την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

4.2.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες

Μονοδιάστατα Προβλήματα

Τοίχωμα με $T = T(x, t)$

Για την εύρεση της θερμοκρασιακής κατανομής, θεωρείται τοίχωμα όπως στο Σχήμα 4.2.1, πάχους $2L$ και αρχικής ομοιόμορφης θερμοκρασίας $T = T_i$. Το μέσο το οποίο περιβάλλει το τοίχωμα βρίσκεται σε θερμοκρασία T_∞ . Η θερμότητα μεταδίδεται από το τοίχωμα προς το περιβάλλον (ή το αντίστροφο), με συναγωγή. Ο συντελεστής συναγωγής h θεωρείται σταθερός.



Σχήμα 4.2.1: Μονοδιάστατη, μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας σε τοίχωμα (Yevtushenko & Kuciej, 2012).

Η εξίσωση μετάδοσης θερμότητας που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα είναι η εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.1)$$

όπου $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Λόγω συμμετρίας του προβλήματος αρκεί να λυθεί το μισό του τοιχώματος $0 \leq x \leq L$. Οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες σχετίζονται με τη συμμετρία, καθώς και με την έκθεση των επιφανειών του σώματος σε συναγωγή, είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (4.2.2\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_\infty], \quad (4.2.2\beta)$$

ενώ η αρχική συνθήκη είναι:

$$T(x, 0) = T_i \quad (4.2.3)$$

Για την ευκολότερη επίλυση της Εξ. (4.2.1) και των συνθηκών, εισάγονται οι αδιάστατες μεταβλητές θέσης, $X = \frac{x}{L}$, και θερμοκρασίας, $\theta = \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$. Η τελευταία είναι ο λόγος της διαφοράς θερμοκρασίας σε μια τυχαία χρονική στιγμή t , προς τη μέγιστη διαφορά θερμοκρασίας. Σημειώνεται ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial X} &= \frac{\partial \theta}{\partial (\frac{x}{L})} = \frac{\partial \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]}{\partial (\frac{x}{L})} = \frac{\partial \left[\frac{T(x, t)}{T_i - T_\infty} \right]}{\frac{1}{L} \partial(x)} = \frac{L}{T_i - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} &= \frac{L^2}{T_i - T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]}{\partial t} = \frac{\partial \left[\frac{T(x, t)}{T_i - T_\infty} \right]}{\partial(t)} = \frac{1}{T_i - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην Εξ. (4.2.1), προκύπτει:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i - T_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \frac{T_i - T_\infty}{L} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{T_i - T_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$$

και τελικά

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (4.2.4)$$

όπου η Εξ. (4.2.2α) δίνει:

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial X} = 0 \quad (4.2.5\alpha)$$

και η Εξ. (4.2.2β) δίνει:

$$\begin{aligned} -k \frac{T_i - T_\infty}{L} \frac{\partial \theta(L,t)}{\partial X} &= h \theta(L,t) (T_i - T_\infty) \\ \Rightarrow \frac{\partial \theta(1,t)}{\partial X} &= -\frac{hL}{k} \theta(1,t) \quad \text{στο } X = 1 \end{aligned} \quad (4.2.5\beta)$$

και τέλος η αρχική συνθήκη Εξ. (4.2.3) δίνει:

$$\theta(X, 0) = \frac{T(x, 0) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1 \quad (4.2.6)$$

Θεωρώντας τον αδιάστατο χρόνο, ή αριθμό Fourier, $\tau = Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$ και γνωρίζοντας ότι

$Bi = \frac{hL}{k}$ είναι ο αριθμός Biot, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν σε αδιάστατη μορφή ως

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (4.2.7)$$

$$\frac{\partial \theta(0,\tau)}{\partial X} = 0 \quad (4.2.8\alpha)$$

$$\frac{\partial \theta(1,\tau)}{\partial X} = -Bi \theta(1,\tau) \quad (4.2.8\beta)$$

$$\theta(X, 0) = 1 \quad (4.2.9)$$

Με την αδιαστατοποίηση των μεγεθών μειώνεται ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών από $T = F(x, L, t, k, \alpha, h, T_i, T_\infty)$ σε $\theta = F(X, Bi, Fo)$.

Για την επίλυση της Εξ. (4.2.7), η συνάρτηση $\theta(X, \tau)$ εκφράζεται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $\Phi(x)$ και $\Psi(\tau)$ ως

$$\theta(X, \tau) = \Phi(x) \Psi(\tau) \quad (4.2.10)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ(4.2.10) στην (4.2.7), προκύπτει

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dX^2} = \frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{d\tau} = -\lambda^2, \quad (4.2.11)$$

όπου $-\lambda^2$ μια σταθερά διαχωρισμού. Επομένως ανακύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d^2 \Phi}{dX^2} + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (4.2.12\alpha)$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} + \lambda^2 \Psi = 0 \quad (4.2.12\beta)$$

με τις γενικές τους λύσεις:

$$\Phi(X) = A_1 \cos \lambda X + A_2 \sin \lambda X \quad (4.2.13\alpha)$$

$$\Psi(\tau) = A_3 e^{-\lambda^2 \tau} \quad (4.2.13\beta)$$

όπου A_1 , A_2 , και A_3 , σταθερές οι οποίες θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες. Με αντικατάσταση των (4.2.13α) και (4.2.13β) στην Εξ(4.2.10), η γενική λύση γράφεται ως

$$\theta = (A_1 \cos \lambda X + A_2 \sin \lambda X) A_3 e^{-\lambda^2 \tau} = (C_1 \cos \lambda X + C_2 \sin \lambda X) e^{-\lambda^2 \tau} \quad (4.2.14)$$

με $C_1 = A_1 A_3$, και $C_2 = A_2 A_3$. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες (4.2.8α) και (4.2.8β) στην Εξ. (4.2.10) προκύπτουν:

$$(4.2.8\alpha) \rightarrow -(C_1 \lambda \sin \lambda \cdot 0 + C_2 \lambda \cos \lambda \cdot 0) e^{-\lambda^2 \tau} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

άρα

$$\theta = C_1 \cos(\lambda X) e^{-\lambda^2 \tau} \quad (4.2.15)$$

$$(4.2.8\beta) \rightarrow -C_1 \sin \lambda e^{-\lambda^2 \tau} = -Bi C_1 \cos \lambda e^{-\lambda^2 \tau} \Rightarrow \lambda \tan \lambda = Bi \quad (4.2.16)$$

Η Εξ. (4.2.16) έχει άπειρες ρίζες λ_n , με $n = 1, 2, 3, \dots$, οι οποίες ονομάζονται ιδιοτιμές. Επομένως, η λύση (4.2.15) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n X) e^{-\lambda_n^2 \tau} \quad (4.2.17)$$

Ο συντελεστής A_n , υπολογίζεται από την αρχική συνθήκη:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n X) = 1 \quad (4.2.18)$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\cos(\lambda_m X)$ και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της Εξ. (4.2.18) από $X = 0$ έως $X = 1$, ο συντελεστής A_n προκύπτει ως

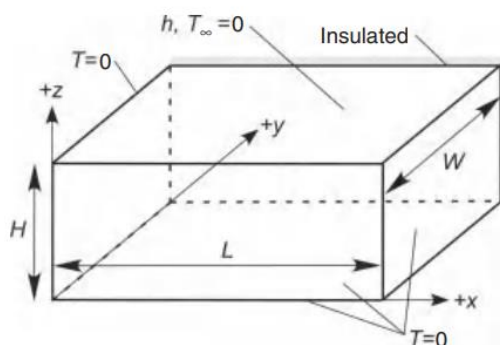
$$A_n = \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} \quad (4.2.19)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω μεθοδολογία λύνονται μονοδιάστατα προβλήματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες, χωρίς πηγή θερμότητας. Με ανάλογη συλλογιστική μπορούν να λυθούν προβλήματα σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

Τριδιάστατα Προβλήματα

Πλάκα με $T = T(x, y, z, t)$

Για την κατανόηση της μη μόνιμης μετάδοσης θερμότητας σε τρεις διευθύνσεις, θα μελετηθεί μια ορθογωνική πλάκα διαστάσεων $L \times W \times H$ όπως στο Σχήμα 4.2.2. Η αρχική θερμοκρασιακή κατανομή είναι $T(t = 0) = f(x, y, z)$, ενώ για $t > 0$ οι επιφάνειες του στερεού διατηρούνται σε θερμοκρασία $T = 0$, εκτός από την επιφάνεια $y = W$ η οποία είναι μονωμένη, και την επιφάνεια $z = H$ από την οποία η θερμότητα μεταδίδεται προς ρευστό (π.χ. αέρας) θερμοκρασίας T_∞ , μέσω συναγωγής.



Σχήμα 4.2.2: Τριδιάστατη πλάκα σε καρτεσιανές συντεταγμένες (Hahn & Özisik, 2012).

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.20), τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (4.2.21α), (4.2.21β), (4.2.21γ) και τη μη ομογενή αρχική συνθήκη (4.2.21δ).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.20)$$

$$T(x = 0, y, z) = 0, \quad T(x = L, y, z) = 0 \quad (4.2.21\alpha)$$

$$T(x, y = 0, z) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=W} = 0 \quad (4.2.21\beta)$$

$$T(x, y, z = 0) = 0, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = hT|_{z=H} \quad (4.2.21\gamma)$$

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) \quad (4.2.21\delta)$$

Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία $T(x, y, z, t)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων X, Y, Z , και S κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή x, y, z και t , αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$T(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)S(t) \quad (4.2.22)$$

Η Εξ. (4.2.22) αντικαθίσταται στην Εξ. (4.2.20) και λαμβάνεται η Εξ. (4.2.23) ως

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (4.2.23)$$

όπου λ^2 η σταθερά διαχωρισμού. Θεωρούμε αρχικά την ομογενή διαφορική εξίσωση η οποία εξαρτάται από τον χρόνο:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \lambda^2 \alpha S = 0 \quad (4.2.24)$$

η γενική λύση της οποίας είναι:

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.25)$$

Στη συνέχεια διαχωρίζεται η συνάρτηση $X(x)$, και δεδομένου ότι $\frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2$, η Εξ. (4.2.23)

γράφεται ως

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 = -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \beta^2 \quad (4.2.26)$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\beta^2, \quad (4.2.27)$$

όπου β^2 μια σταθερά διαχωρισμού. Η γενική Εξ. (4.2.27) είναι μια συνήθης, ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, και η γενική της λύση είναι:

$$X(x) = A_2 \cos \beta x + A_3 \sin \beta x \quad (4.2.28)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.21α) για $x = 0$, προκύπτει:

$$X(x = 0) = 0 \Rightarrow A_2 \cos \beta \cdot 0 + A_3 \sin \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0,$$

ενώ για $x = L$:

$$X(x = L) = 0 \Rightarrow A_3 \sin \beta L = 0 \Rightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{L} \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.29)$$

Άρα η Εξ. (4.2.28) γράφεται ως

$$X_n(x) = A_3 \sin \beta_n x \quad (4.2.30)$$

Με τον ίδιο τρόπο διαχωρίζεται και η συνάρτηση $Y(y)$, με την Εξ. (4.2.23) να γράφεται ως

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 - \beta^2 = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \eta^2 \quad (4.2.31)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\eta^2, \quad (4.2.32)$$

όπου η^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η γενική λύση της Εξ. (4.2.32) είναι:

$$Y(y) = A_4 \cos \eta y + A_5 \sin \eta y \quad (4.2.33)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.21β) για $y = 0$, προκύπτει:

$$Y(y = 0) = 0 \Rightarrow A_4 \cos \eta \cdot 0 + A_5 \sin \eta \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_4 = 0$$

ενώ για $y = W$:

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=W} = 0 \Rightarrow \eta A_5 \cos \eta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \cos \eta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \eta_m = \frac{(2m+1)\pi}{2} \text{ για } m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.34)$$

Άρα η Εξ. (4.2.33) γράφεται ως

$$Y_m(y) = A_5 \sin \eta_m y \quad (4.2.35)$$

Τέλος, διαχωρίζεται και ο όρος $Z(z)$, με την Εξ. (4.2.23) να γράφεται ως

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 - \beta^2 - \eta^2 = 0 \quad (4.2.36)$$

Αντικαθιστώντας το $\mu^2 = \lambda^2 - \beta^2 - \eta^2$ στην Εξ. (4.2.36), προκύπτει η Εξ. (4.2.37):

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \mu^2 = 0 \quad (4.2.37)$$

η γενική λύση της οποίας είναι:

$$Z(z) = A_6 \cos \mu z + A_7 \sin \mu z \quad (4.2.38)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.21γ) για $z = 0$, προκύπτει:

$$Z(z = 0) = 0 \Rightarrow A_6 \cos \mu \cdot 0 + A_7 \sin \mu \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_6 = 0$$

ενώ για $z = H$:

$$-k \left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=H} = hZ|_{z=H} \Rightarrow -k\mu A_7 \cos \mu H = hA_7 \sin \mu H \Rightarrow \mu_p \tan \mu_p = -\frac{h}{k} \text{ για } p = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.39)$$

Άρα η Εξ. (4.2.38) γράφεται ως

$$Z_p(z) = A_7 \sin \mu_p z \quad (4.2.40)$$

Συνδυάζοντας και αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.2.25), (4.2.30), (4.2.35), και (4.2.40) στην Εξ. (4.2.22), προκύπτει:

$$T_{nmp}(x, y, z) = A_{nmp} \sin \beta_n x \sin \eta_m y \sin \mu_p z e^{-\alpha \lambda_{nmp}^2 t} \quad (4.2.41)$$

όπου $A_{nmp} = A_1 A_3 A_5 A_7$ μια νέα σταθερά και $\lambda_{nmp}^2 = \beta_n^2 + \eta_m^2 + \mu_p^2$.

Η Εξ. (4.2.41) μπορεί να γραφεί ως τριπλό άθροισμα λύσεων της μορφής:

$$T(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{nmp} \sin \beta_n x \sin \eta_m y \sin \mu_p z e^{-\alpha \lambda_{nmp}^2 t} \quad (4.2.42)$$

Η σταθερά J_{nmp} υπολογίζεται με τη χρήση της μη ομογενούς αρχικής συνθήκης (4.2.21δ) ως εξής:

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{nmp} \sin \beta_n x \sin \eta_m y \sin \mu_p z \quad (4.2.43)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, χρησιμοποιούνται και στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.43) τα ολοκληρώματα των ορθογώνιων ιδιοσυναρτήσεων $\int_{x=0}^L \sin \beta_u x dx$, $\int_{y=0}^W \sin \eta_v y dy$, και $\int_{z=0}^H \sin \mu_w z dz$, και προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^L \int_{y=0}^W \int_{z=0}^H f(x, y, z) \sin \beta_u x \sin \eta_v y \sin \mu_w z dz dy dx = \\ & \int_{x=0}^L \int_{y=0}^W \int_{z=0}^H \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{nmp} \sin \beta_n x \sin \beta_u x \sin \eta_m y \sin \eta_v y \sin \mu_p z \sin \mu_w z dz dy dx \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ορθογωνιότητας, τα παραπάνω γινόμενα είναι μη μηδενικά στην περίπτωση που $n = u$, $m = v$, και $p = w$. Άρα η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται στην Εξ. (4.2.45):

$$A_{nmp} = \frac{\int_{x=0}^L \int_{y=0}^W \int_{z=0}^H f(x, y, z) \sin \beta_n x \sin \eta_m y \sin \mu_p z dz dy dx}{\int_{x=0}^L \sin^2 \beta_n x dx \int_{y=0}^W \sin^2 \eta_m y dy \int_{z=0}^H \sin^2 \mu_p z dz} \quad (4.2.45)$$

4.2.2 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Τα μη μόνιμα προβλήματα μετάδοσης θερμότητας όπως στις καρτεσιανές έτσι και στις κυλινδρικές συντεταγμένες επιλύονται με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, μόνο όταν η διαφορική εξίσωση και οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς, εκτός από μία μη ομογενή συνθήκη, την αρχική συνθήκη.

Διδιάστατα Προβλήματα

$T = T(r, \varphi, t)$ για Στερεό Κύλινδρο

Έστω κύλινδρος μεγάλου μήκους, ακτίνας $r = b$, στον οποίο η μετάδοση θερμότητας κατά τη διεύθυνση z θεωρείται αμελητέα. Η επιφάνεια $r = b$ είναι εκτεθειμένη σε ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας, επομένως επικρατούν συνθήκες συναγωγής με h τη σταθερά συναγωγής. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.46) και τις συνοριακές

συνθήκες (4.2.47α), (4.2.47β), (4.2.47γ), καθώς και από την αρχική συνθήκη (4.2.47δ), ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t > 0 \quad (4.2.46)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = hT|_{r=b} \quad (4.2.47\alpha)$$

$$T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi) \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (4.2.47\beta)$$

$$\left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi} = \left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi+2\pi} \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (4.2.47\gamma)$$

$$T(t = 0) = F(r, \varphi) \quad (4.2.47\delta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (4.2.47β) και (4.2.47γ) δηλώνουν την περιοδικότητα 2π της θερμοκρασίας και της ροής θερμότητας στη διεύθυνση φ . Όλες οι συνοριακές συνθήκες εκτός την αρχική συνθήκη (4.2.47δ) είναι ομογενείς, επομένως το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Η θερμοκρασία $T = T(r, \varphi, t)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R , Φ και S , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από τη μεταβλητή r , φ και t αντίστοιχα, ως εξής:

$$T = T(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)S(t) \quad (4.2.48)$$

η οποία αντικαθίσταται στην Εξ. (4.2.46) και προκύπτει:

$$\Phi S \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \Phi S \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} R S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\alpha} R \Phi \frac{\partial S}{\partial t}$$

Διαιρώντας με $R\Phi S$ και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει η Εξ. (4.2.49) ως

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (4.2.49)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.2.50)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.50) δίνεται από την Εξ. (4.2.51) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.51)$$

Η Εξ. (4.2.49) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $\Phi(\varphi)$ γίνεται:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + r^2 \lambda^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \eta^2 \quad (4.2.52)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \eta^2 \Phi = 0 \quad (4.2.53)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.53) δίνεται από την Εξ. (4.2.54) ως

$$\Phi(\varphi) = A_2 \cos \eta \varphi + A_3 \sin \eta \varphi \quad (4.2.54)$$

Για να ικανοποιούνται οι συνθήκες περιοδικότητας 2π από την Εξ. (4.2.54), πρέπει:

$$\eta_n = n \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots$$

Τέλος, η Εξ. (4.2.49) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, για $\eta_n = n$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.2.55)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel n - τάξης, με γενική λύση την Εξ. (4.2.56):

$$R(r) = A_4 J_n(\lambda r) + A_5 Y_n(\lambda r) \quad (4.2.56)$$

όπου J_n και Y_n οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.47α) για $r \rightarrow 0$, απαλείφεται ο όρος $A_5 Y_n(\lambda r)$, καθώς $Y_n(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως πρέπει η σταθερά A_5 να ισούται με μηδέν. Άρα η συνάρτηση $R(r)$ δίνεται πλέον από την Εξ. (4.2.57):

$$R(r) = A_4 J_n(\lambda r) \quad (4.2.57)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (4.2.57) στη συνοριακή συνθήκη συναγωγής (4.2.47α), προκύπτει:

$$\begin{aligned} -k \frac{A_4 dJ_n(\lambda r)}{dr} \Big|_{r=b} &= h A_4 J_n(\lambda r) \Big|_{r=b} \\ \Rightarrow \frac{dJ_n(\lambda r)}{dr} \Big|_{r=b} + \frac{h}{k} J_n(\lambda b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

όπου $\lambda = \lambda_{nm}$ για $m = 1, 2, 3, \dots$. Οι δείκτες n, m υποδηλώνουν πως για κάθε n υπάρχει ένα σύνολο ιδιοτιμών λ_{nm} . Για παράδειγμα, για $n = 0$ η Εξ. (4.2.58) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0(\lambda_m r)}{dr} \Big|_{r=b} + \frac{h}{k} J_0(\lambda_m b) &= 0 \\ \Rightarrow -\lambda_m J_1(\lambda_m b) + \frac{h}{k} J_0(\lambda_m b) &= 0 \rightarrow \lambda_m \text{ για } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.48), προκύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.2.51), (4.2.54) και (4.2.57) ως

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} A_4 J_n(\lambda r) (A_2 \cos n\varphi + A_3 \sin n\varphi) \\ \Rightarrow T(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} J_n(\lambda_{nm} r) (\alpha_{nm} \cos n\varphi + \beta_{nm} \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

όπου $\alpha_{nm} = A_1 A_2 A_4$ και $\beta_{nm} = A_1 A_3 A_4$. Για τον προσδιορισμό των α_{nm} και β_{nm} , εφαρμόζεται η αρχική συνθήκη (4.2.47δ), και προκύπτει:

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r) (\alpha_{nm} \cos n\varphi + \beta_{nm} \sin n\varphi) \quad (4.2.61)$$

Αρχικά, για την εύρεση του α_{nm} γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των συναρτήσεων Bessel, εφαρμόζοντας διαδοχικά και

στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.61) τα ολοκληρώματα $\int_{r=0}^b r J_n(\lambda_{nj}r) dr$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos k\varphi d\varphi$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nj}r) \cos k\varphi dr d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm}r) (\alpha_{nm} \cos n\varphi + \\ &\beta_{nm} \sin n\varphi) r J_n(\lambda_{nj}r) \cos k\varphi dr d\varphi \\ \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nj}r) \cos k\varphi dr d\varphi &= \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (J_n(\lambda_{nm}r) \alpha_{nm} \cos n\varphi r J_n(\lambda_{nj}r) \cos k\varphi + J_n(\lambda_{nm}r) \beta_{nm} \sin n\varphi r J_n(\lambda_{nj}r) \cos k\varphi) &dr d\varphi \end{aligned}$$

Για $m = j$ και $n = k$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nm}r) \cos n\varphi d\varphi dr &= \alpha_{nm} \int_{r=0}^b r J_n^2(\lambda_{nm}r) dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi \\ \Rightarrow \alpha_{nm} &= \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nm}r) \cos n\varphi dr d\varphi}{\int_{r=0}^b r J_n^2(\lambda_{nm}r) dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi} \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

Για την εύρεση του β_{nm} εφαρμόζονται διαδοχικά τα $\int_{r=0}^b r J_n(\lambda_{nj}r) dr$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin k\varphi d\varphi$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nj}r) \sin k\varphi dr d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm}r) (\alpha_{nm} \cos n\varphi + \\ &\beta_{nm} \sin n\varphi) r J_n(\lambda_{nj}r) \sin k\varphi dr d\varphi \\ \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nj}r) \sin k\varphi dr d\varphi &= \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (J_n(\lambda_{nm}r) \alpha_{nm} \cos n\varphi r J_n(\lambda_{nj}r) \sin k\varphi + J_n(\lambda_{nm}r) \beta_{nm} \sin n\varphi r J_n(\lambda_{nj}r) \sin k\varphi) &dr d\varphi \end{aligned}$$

Για $m = j$ και $n = k$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nm}r) \sin n\varphi d\varphi dr &= \beta_{nm} \int_{r=0}^b r J_n^2(\lambda_{nm}r) dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi \\ \Rightarrow \beta_{nm} &= \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi) r J_n(\lambda_{nm}r) \sin n\varphi dr d\varphi}{\int_{r=0}^b r J_n^2(\lambda_{nm}r) dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi} \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

$T = T(r, z, t)$ για Κοίλο Κύλινδρο

Έστω κυκλικός κύλινδρος μήκους L , εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b , στον οποίο η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται κατά τις διευθύνσεις r και z . Η εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια διατηρούνται σε θερμοκρασία μηδέν, η επιφάνεια $z = 0$ είναι μονωμένη, ενώ στην $z = L$ η θερμότητα μεταφέρεται με συναγωγή σε ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.64), τις συνοριακές συνθήκες (4.2.65α), (4.2.65β), και την αρχική συνθήκη (4.2.65δ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a < r < b, \quad 0 < z < L \quad (4.2.64)$$

$$T(r = a) = 0, \quad T(r = b) = 0 \quad (4.2.65\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = hT|_{z=L} \quad (4.2.65\beta)$$

$$T(t = 0) = F(r, z) \quad (4.2.65\gamma)$$

Όλες οι συνοριακές συνθήκες εκτός την αρχική συνθήκη Εξ. (4.2.65γ) είναι ομογενείς, επομένως το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Η θερμοκρασία $T = T(r, z, t)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R , Z και S , κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από την μεταβλητή r , z και t αντίστοιχα, ως εξής:

$$T = T(r, z, t) = R(r)Z(z)S(t) \quad (4.2.66)$$

η οποία αντικαθίσταται στην Εξ. (4.2.64) και προκύπτει:

$$ZS \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} ZS \frac{\partial R}{\partial r} + RS \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} RZ \frac{\partial S}{\partial t}$$

Διαιρώντας με RZS και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει η Εξ. (4.2.67) ως

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (4.2.67)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.2.68)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.68) δίνεται από την Εξ. (4.2.69) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.69)$$

Η Εξ. (4.2.67) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$ γίνεται:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \lambda^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta^2 \quad (4.2.70)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (4.2.71)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.71) δίνεται από την Εξ. (4.2.72) ως

$$Z(z) = A_2 \cos \beta z + A_3 \sin \beta z \quad (4.2.72)$$

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (4.2.72) τη συνοριακή συνθήκη (4.2.65β) για $z = 0$, προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow -A_2 \beta \sin \beta z + A_3 \beta \cos \beta z = 0 \Rightarrow A_3 = 0$$

ενώ για $z = L$:

$$\begin{aligned} -k \left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=L} &= hZ|_{z=L} \Rightarrow kA_2 \beta \sin \beta L = hA_2 \cos \beta L \\ \Rightarrow \beta_n \tan \beta_n L &= \frac{h}{L}, \quad \beta_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

Τέλος, η Εξ. (4.2.67) μετά από τον διαχωρισμό του $R(r)$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\lambda^2 - \beta^2)R = 0 \quad (4.2.74)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, με γενική λύση την Εξ. (4.2.75):

$$R(r) = A_4 J_0(\eta r) + A_5 Y_0(\eta r) \quad (4.2.75)$$

όπου J_0, Y_0 οι συναρτήσεις Bessel και $\eta^2 = \lambda^2 - \beta^2$. Αντικαθιστώντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.65α) για $r = a$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} R(r = a) = 0 &\Rightarrow A_4 J_0(\eta a) + A_5 Y_0(\eta a) = 0 \\ \Rightarrow A_5 &= -A_4 \frac{J_0(\eta a)}{Y_0(\eta a)} \end{aligned} \quad (4.2.76)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.76) στην (4.2.75), βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\frac{D}{Y_0(\eta a)}$ και προκύπτει:

$$\begin{aligned} R(r) &= A_4 J_0(\eta r) - A_4 \frac{J_0(\eta a)}{Y_0(\eta a)} Y_0(\eta r) = \frac{A_4}{Y_0(\eta a)} (J_0(\eta r) Y_0(\eta a) - J_0(\eta a) Y_0(\eta r)) \\ \Rightarrow R(r) &= A_6 (J_0(\eta r) Y_0(\eta a) - J_0(\eta a) Y_0(\eta r)) \end{aligned} \quad (4.2.77)$$

όπου $A_6 = \frac{A_4}{Y_0(\eta a)}$. Εφαρμόζοντας στην Εξ. (4.2.77) την (4.2.65α) για $r = b$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} R(r = b) = 0 &\Rightarrow A_6 (J_0(\eta b) Y_0(\eta a) - J_0(\eta a) Y_0(\eta b)) = 0 \\ \Rightarrow J_0(\eta_m b) Y_0(\eta_m a) - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m b) &= 0, \quad \eta_m \text{ για } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.2.78)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.66) προκύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.2.69), (4.2.72) και (4.2.77) ως εξής:

$$\begin{aligned} T(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_1 e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} A_2 \cos \beta_n z A_6 (J_0(\eta_m r) Y_0(\eta_m a) - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m r)) \\ \Rightarrow T(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} \cos \beta_n z (J_0(\eta_m r) Y_0(\eta_m a) - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m r)) \end{aligned} \quad (4.2.79)$$

όπου $A_{nm} = A_1 A_2 A_6$ και $\lambda_{nm}^2 = \eta_m^2 + \beta_n^2$. Τέλος, εφαρμόζεται και η αρχική συνθήκη (4.2.65γ):

$$F(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos \beta_n z (J_0(\eta_m r) Y_0(\eta_m a) - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m r)) \quad (4.2.80)$$

Για τον υπολογισμό της σταθεράς A_{nm} γίνεται χρήση της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel, $J_0(\eta_m r)$, $Y_0(\eta_m r)$ και της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\cos \beta_n z$, εφαρμόζοντας διαδοχικά και στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.80) τα ολοκληρώματα $\int_{r=a}^b r (J_0(\eta_j r) Y_0(\eta_j a) - J_0(\eta_j a) Y_0(\eta_j r)) dr$ και $\int_{z=0}^L \cos \beta_k z dz$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^L \int_{r=a}^b r F(r, z) (J_0(\eta_j r) Y_0(\eta_j a) - J_0(\eta_j a) Y_0(\eta_j r)) \cos \beta_k z dr dz = \\ \int_{z=0}^L \int_{r=a}^b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r A_{nm} \cos \beta_n z \cos \beta_k z (J_0(\eta_m r) Y_0(\eta_m a) - \\ - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m r)) (J_0(\eta_j r) Y_0(\eta_j a) - J_0(\eta_j a) Y_0(\eta_j r)) dr dz \end{aligned}$$

Για $n = k$ και $m = j$, προκύπτει:

$$A_{nm} = \frac{\int_{z=0}^L \int_{r=a}^b r F(r, z) (J_0(\eta_m r) Y_0(\eta_m a) - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m r)) \cos \beta_n z dr dz}{\int_{r=a}^b r (J_0(\eta_m r) Y_0(\eta_m a) - J_0(\eta_m a) Y_0(\eta_m r))^2 dr \int_{z=0}^L \cos^2 \beta_n z dz} \quad (4.2.81)$$

Τριδιάστατα Προβλήματα

$T = T(r, \varphi, z, t)$ για Στερεό Κύλινδρο

Έστω στερεός κυκλικός κύλινδρος ακτίνας $r = b$ και μήκους L , στον οποίο η μετάδοση της θερμότητας πραγματοποιείται στις τρεις διευθύνσεις. Η επιφάνεια $r = b$ είναι εκτεθειμένη σε ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας, επομένως η θερμότητα μεταδίδεται μέσω συναγωγής. Η επιφάνεια $z = 0$ είναι μονωμένη, ενώ η $z = L$ διατηρείται σε μηδενική θερμοκρασία. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.82), τις συνοριακές συνθήκες (4.2.83α), (4.2.83β), (4.2.83γ), (4.2.83δ) και την αρχική συνθήκη (4.2.83ε):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.82)$$

$$0 \leq r < b, \quad 0 < z < L, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t > 0$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = hT|_{r=b} \quad (4.2.83\alpha)$$

$$T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi) \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (4.2.83\beta)$$

$$\left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi} = \left. \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi+2\pi} \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (4.2.83\gamma)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad T(z=L) = 0 \quad (4.2.83\delta)$$

$$T(t=0) = F(r, \varphi) \quad (4.2.83\epsilon)$$

Όλες οι συνοριακές συνθήκες εκτός την αρχική συνθήκη Εξ. (4.2.83ε) είναι ομογενείς, επομένως το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών.

Η θερμοκρασία $T = T(r, \varphi, z, t)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R, Φ, Z και S , κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από τη μεταβλητή r, φ, z και t αντίστοιχα, ως εξής:

$$T = T(r, z, t) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)S(t) \quad (4.2.84)$$

η οποία αντικαθίσταται στην Εξ. (4.2.82) και προκύπτει:

$$\Phi Z S \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \Phi Z S \frac{\partial R}{\partial r} + R Z S \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + R \Phi S \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} R \Phi Z \frac{\partial S}{\partial t}$$

Διαιρώντας με $R\Phi ZS$ και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει η Εξ. (4.2.85) ως

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (4.2.85)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.2.86)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.86) δίνεται από την Εξ. (4.2.87) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.87)$$

Η Εξ. (4.2.85) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$ γίνεται:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta^2 \quad (4.2.88)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (4.2.89)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.89) δίνεται από την Εξ. (4.2.90) ως

$$Z(z) = A_2 \cos \beta z + A_3 \sin \beta z \quad (4.2.90)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη για $z = 0$, προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow -A_2 \beta \sin \beta z + A_3 \beta \cos \beta z = 0 \Rightarrow A_3 = 0$$

και η Εξ. (4.2.90) γράφεται:

$$Z(z) = A_2 \cos \beta z, \quad (4.2.91)$$

ενώ για $z = L$, προκύπτει:

$$Z(z=L) = 0 \Rightarrow A_2 \cos \beta L = 0$$

$$\cos \beta L = 0 \rightarrow \beta_m = \frac{(2m+1)\pi}{2L} \text{ για } m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.92)$$

Η Εξ. (4.2.85) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $\Phi(\varphi)$ γίνεται:

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + r^2 (\lambda^2 - \beta^2) = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \eta^2 \quad (4.2.93)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \eta^2 \Phi = 0 \quad (4.2.94)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.94) δίνεται από την Εξ. (4.2.95) ως

$$\Phi(\varphi) = A_4 \cos \eta \varphi + A_5 \sin \eta \varphi \quad (4.2.95)$$

Για να ικανοποιούνται οι συνθήκες περιοδικότητας 2π από την Εξ. (4.2.95), πρέπει

$$\eta_n = n \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots$$

Τέλος, η Εξ. (4.2.85) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

ή

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\delta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.2.96)$$

η οποία είναι εξίσωση Bessel n τάξης, με $\delta^2 = \lambda^2 - \beta^2$ και $n = \eta_n$. Η γενική λύση της Εξ. (4.2.96) δίνεται από την Εξ. (4.2.97) ως

$$R(r) = A_6 J_n(\delta r) + A_7 Y_n(\delta r) \quad (4.2.97)$$

όπου J_n και Y_n οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.83α) για $r \rightarrow 0$, απαλείφεται ο όρος $A_7 Y_n(\delta r)$, καθώς $Y_n(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως πρέπει η σταθερά A_7 να ισούται με μηδέν. Άρα η συνάρτηση $R(r)$ δίνεται πλέον από την Εξ. (4.2.98):

$$R(r) = A_6 J_n(\delta r) \quad (4.2.98)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.98) στη συνοριακή συνθήκη (4.2.83α) για $r = b$, προκύπτει:

$$\left. \frac{dJ_n(\delta r)}{dr} \right|_{r=b} + \frac{h}{k} J_n(\delta b) = 0 \rightarrow \delta_{np} \text{ για } p = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.99)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.2.84) προκύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.2.87), (4.2.91), (4.2.95) και (4.2.98) ως εξής:

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_1 e^{-\alpha \lambda_{nmp}^2 t} A_2 \cos \beta_m z A_6 J_n(\delta_{np} r) (A_4 \cos n\varphi + A_5 \sin n\varphi) \\ \Rightarrow T(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_{nmp}^2 t} \cos \beta_m z J_n(\delta_{np} r) (\alpha_{nmp} \cos n\varphi + b_{nmp} \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (4.2.100)$$

όπου $\alpha_{nmp} = A_1 A_2 A_4 A_6$ και $b_{nmp} = A_1 A_2 A_5 A_6$, και $\lambda_{nmp}^2 = \delta_{np}^2 + \beta_m^2$.

Τέλος, εφαρμόζεται και η αρχική συνθήκη (4.2.83ε) και έχουμε:

$$F(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \cos \beta_m z J_n(\delta_{np} r) (\alpha_{nmp} \cos n\varphi + b_{nmp} \sin n\varphi) \quad (4.2.101)$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών α_{nmp} και b_{nmp} γίνεται χρήση της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel, $J_n(\delta_{np} r)$ και της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\cos \beta_m z$, εφαρμόζοντας διαδοχικά και στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.101) τα ολοκληρώματα $\int_{r=0}^b r J_n(\delta_{nj} r) dr$, $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos k\varphi d\varphi$ και $\int_{z=0}^L \cos \beta_q z dz$, ως εξής:

$$\int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi, z) r J_n(\delta_{nj} r) \cos k\varphi \cos \beta_q z dr d\varphi dz =$$

$$\int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \cos \beta_m z J_n(\delta_{np} r) (\alpha_{nmp} \cos n\varphi + b_{nmp} \sin n\varphi) r J_n(\delta_{nj} r) \cos k\varphi \cos \beta_q z dr d\varphi dz$$

$$\Rightarrow \int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi, z) r J_n(\delta_{nj} r) \cos k\varphi \cos \beta_q z dr d\varphi dz =$$

$$\int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{nmp} \cos n\varphi \cos \beta_m z J_n(\delta_{np} r) r J_n(\delta_{nj} r) \cos k\varphi \cos \beta_q z + b_{nmp} \sin n\varphi \cos \beta_m z J_n(\delta_{np} r) r J_n(\delta_{nj} r) \cos k\varphi \cos \beta_q z) dr d\varphi dz,$$

και για $j = p$, $m = q$ και $k = n$, προκύπτει:

$$\alpha_{nmp} = \frac{\int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi, z) r J_n(\delta_{np} r) \cos n\varphi \cos \beta_m z dr d\varphi dz}{\int_{r=0}^b r J_n^2(\delta_{np} r) dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi \int_{z=0}^L \cos^2 \beta_m z dz} \quad (4.2.102)$$

Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του b_{nmp} εφαρμόζονται στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.101) τα

$\int_{r=0}^b r J_n(\delta_{nj} r) dr$, $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin k\varphi d\varphi$ και $\int_{z=0}^L \cos \beta_q z dz$, και με τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$b_{nmp} = \frac{\int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^b F(r, \varphi, z) r J_n(\delta_{np} r) \sin n\varphi \cos \beta_m z dr d\varphi dz}{\int_{r=0}^b r J_n^2(\delta_{np} r) dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi \int_{z=0}^L \cos^2 \beta_m z dz} \quad (4.2.103)$$

4.2.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν τα μη μόνιμα προβλήματα μετάδοσης θερμότητας στις σφαιρικές συντεταγμένες. Για την επίλυσή τους με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, είναι απαραίτητο το πρόβλημα να αποτελείται από ομογενή μερική διαφορική εξίσωση και ομογενείς συνοριακές συνθήκες εκτός από μία μη ομογενή συνθήκη η οποία είναι η αρχική συνθήκη. Παρακάτω επιλύονται διάφορα προβλήματα, μονοδιάστατα και πολυδιάστατα, με διάφορες συνοριακές συνθήκες.

$T = T(r, t)$ για Στερεά Σφαίρα

Έστω σφαίρα ακτίνας b στην οποία η θερμότητα μεταδίδεται στη διεύθυνση r . Η αρχική θερμοκρασία της σφαίρας είναι $T(t = 0) = F(r)$, ενώ στην επιφάνεια $r = b$, για $t > 0$, η θερμότητα μεταδίδεται μέσω συναγωγής, προς ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.104), τις συνοριακές συνθήκες (4.2.105α), καθώς και την αρχική συνθήκη (4.2.105β).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.104)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = hT|_{r=b} \quad (4.2.105\alpha)$$

$$T(t = 0) = F(r) \quad (4.2.105\beta)$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (rT)}{\partial r} \right) \right] = \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Επομένως η Εξ. (4.2.104) μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.106)$$

Έστω μια νέα μεταβλητή $U = U(r, t)$ η οποία δίνεται από την Εξ. (4.2.107) ως

$$U(r, t) = rT(r, t) \quad (4.2.107)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.107) στην (4.2.106) προκύπτει η διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.108)

ως

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4.2.108)$$

η οποία έχει τη μορφή της εξίσωσης μονοδιάστατης μετάδοσης θερμότητας στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια μετατρέπονται και οι συνοριακές συνθήκες, έτσι ώστε η εξαρτημένη μεταβλητή να είναι η $U(r, t)$.

Η συνοριακή συνθήκη (4.2.105α) για $r \rightarrow 0$, γίνεται:

$$T(r \rightarrow 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{U(r)}{r} \quad (4.2.109)$$

με το όριο να έχει πεπερασμένη τιμή όταν:

$$U(r = 0) = 0 \quad (4.2.110)$$

Για τη μετατροπή της Εξ. (4.2.105α) για $r = b$, αναλύεται αρχικά η παράγωγος $\frac{\partial T}{\partial r}$ ως

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U \quad (4.2.111)$$

και με την αντικατάσταση της Εξ. (4.2.110) στην (4.2.105α), προκύπτει:

$$\begin{aligned} -k \left(\frac{1}{b} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=b} - \frac{1}{b^2} U \Big|_{r=b} \right) &= \frac{h}{b} U \Big|_{r=b} \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=b} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) U \Big|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.112)$$

Τέλος η αρχική συνθήκη (4.2.105β) γίνεται:

$$U(t = 0) = rF(r) \quad (4.2.113)$$

Το πρόβλημα πλέον αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.108), τις συνοριακές συνθήκες (4.2.110) και (4.2.112), και την αρχική συνθήκη (4.2.113).

Για την επίλυση της Εξ. (4.2.108), η συνάρτηση $U(r, t)$ εκφράζεται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $R(r)$ και $S(t)$ ως

$$U(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.2.114)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.114) στην (4.2.108), προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \quad (4.2.115)$$

όπου $-\lambda^2$ η σταθερά διαχωρισμού. Επομένως ανακύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (4.2.116α) και (4.2.116β) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.2.116\alpha)$$

$$\frac{dS}{dt} + \lambda^2 S = 0 \quad (4.2.116\beta)$$

με γενικές λύσεις τις Εξ. (4.2.117α) και (4.2.117β):

$$R(r) = A_1 \cos \lambda r + A_2 \sin \lambda r \quad (4.2.117\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.117\beta)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (4.2.110), προκύπτει:

$$\begin{aligned} R(r=0) = 0 &\Rightarrow A_1 \cos \lambda \cdot 0 + A_2 \sin \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \\ &\Rightarrow R(r) = A_2 \sin \lambda r, \end{aligned} \quad (4.2.118)$$

ενώ από τη συνοριακή συνθήκη (4.2.112) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=b} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) R|_{r=b} = 0 &\Rightarrow A_2 \lambda \cos \lambda b + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) A_2 \sin \lambda b = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_n \cot \lambda_n b = -K, \quad \lambda_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.2.119)$$

με $K = \frac{1}{\left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right)}$. Αθροίζοντας τις λύσεις (4.2.117β) και (4.2.118), προκύπτει η Εξ. (4.2.120) ως

$$\begin{aligned} U(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_2 \sin \lambda_n r A_3 e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \\ &\Rightarrow U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n r e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \end{aligned} \quad (4.2.120)$$

με $A_n = A_2 A_3$. Στην Εξ. (4.2.120) μπορεί να εφαρμοστεί πλέον και η αρχική συνθήκη (4.2.113), από την οποία ανακύπτει η Εξ. (4.2.121) ως

$$rF(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n r \quad (4.2.121)$$

Για τον προσδιορισμό του A_n γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\sin \lambda_n r$, με την εφαρμογή και στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.121) του ολοκληρώματος $\int_{r=0}^b \sin \lambda_p r dr$, και για $p = n$ προκύπτει:

$$A_n = \frac{\int_{r=0}^b rF(r) \sin \lambda_n r dr}{\int_{r=0}^b \sin^2 \lambda_n r dr} \quad (4.2.122)$$

Εφόσον έχει υπολογιστεί η γενική λύση της μεταβλητής $U(r, t)$, μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί και η ζητούμενη λύση $T(r, t)$ από την Εξ. (4.2.107), με αποτέλεσμα η γενική λύση του προβλήματος να δίνεται από την Εξ. (4.2.123) ως

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \lambda_n r}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.2.123)$$

Σημειώνεται πως για $r \rightarrow 0$ ισχύει $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda_n r}{r} = \lambda_n$ σύμφωνα με τον νόμο L' Hopital, επομένως η θερμοκρασία στο κέντρο της σφαίρας είναι:

$$T(r=0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.2.124)$$

Για $t \rightarrow \infty$ η μετάδοση της θερμότητας είναι μόνιμη σε όλη τη σφαίρα και προκύπτει από τις Εξ. (4.2.123) και (4.2.124) ότι $T = 0$, αποτέλεσμα εύλογο δεδομένου ότι η θερμοκρασία του ρευστού που περιβάλλει τη σφαίρα είναι μηδενική.

$T = T(r, \mu, t)$ για Στερεά Σφαίρα

Έστω σφαίρα ακτίνας b στην οποία η θερμότητα μεταδίδεται στις διευθύνσεις r και μ . Η αρχική θερμοκρασία της σφαίρας είναι $T(t = 0) = F(r, \mu)$, ενώ στην επιφάνεια $r = b$, για $t > 0$, η θερμότητα μεταδίδεται μέσω συναγωγής προς ρευστό θερμοκρασίας T_1 . Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.125), τις συνοριακές συνθήκες (4.2.126α), (4.2.126β) και την αρχική συνθήκη (4.2.126γ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (4.2.125)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad T(r = b) = T_1 \quad (4.2.126\alpha)$$

$$T(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.2.126\beta)$$

$$T(t = 0) = F(r, \mu) \quad (4.2.126\gamma)$$

Παρατηρείται πως εκτός από την αρχική συνθήκη, και η συνοριακή συνθήκη (4.2.126α) για $r = b$ είναι μη ομογενής. Για να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών θα πρέπει όλες οι συνοριακές συνθήκες να είναι ομογενείς. Επομένως, ορίζεται μια νέα μεταβλητή θερμοκρασίας, έστω $\theta(r, \mu, t) = T(r, \mu, t) - T_1$, η οποία αντικαθίσταται στις παραπάνω εξισώσεις και προκύπτει το νέο πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (4.2.127)$$

$$\theta(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad \theta(r = b) = 0 \quad (4.2.128\alpha)$$

$$\theta(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.2.128\beta)$$

$$\theta(t = 0) = F(r, \mu) - T_1 = G(r, \mu) \quad (4.2.128\gamma)$$

Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 3.1.3, τα μη μόνιμα προβλήματα μετάδοσης θερμότητας με $\theta = \theta(r, \mu, t)$ επιλύονται με τη χρήση της μεταβλητής $V(r, \mu, t) = r^{\frac{1}{2}} \theta(r, \mu, t)$, με αποτέλεσμα το παραπάνω πρόβλημα να γίνεται:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial t}, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (4.2.129)$$

$$V(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένο}, \quad V(r = b) = 0 \quad (4.2.130\alpha)$$

$$V(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένο} \quad (4.2.130\beta)$$

$$V(t = 0) = r^{\frac{1}{2}}(F(r, \mu) - T_1) = r^{\frac{1}{2}}G(r, \mu) \quad (4.2.130\gamma)$$

Όλες οι συνοριακές συνθήκες, εκτός την αρχική συνθήκη (4.2.130γ), είναι ομογενείς, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Θεωρούμε πως

η θερμοκρασία $V(r, \mu, t)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R , M και S , κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή r , μ και t αντίστοιχα, και εκφράζεται από την Εξ. (4.2.131) ως

$$V(r, \mu, t) = R(r)M(\mu)S(t) \quad (4.2.131)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.131) στην Εξ. (4.2.129), προκύπτουν:

$$\begin{aligned} MS \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} MS \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} MS \frac{R}{r^2} + \frac{1}{r^2} RS \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) &= \frac{1}{a} RM \frac{dS}{dt} \\ \Rightarrow \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2 M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) &= \frac{1}{aS} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \end{aligned} \quad (4.2.132)$$

$$\frac{dS}{dt} + \lambda^2 aS = 0 \quad (4.2.133)$$

όπου λ^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η γενική λύση της Εξ. (4.2.133) δίνεται από την Εξ. (4.2.134)

ως

$$S(t) = A_1 e^{-\lambda^2 t} \quad (4.2.134)$$

Διαχωρίζοντας τον όρο $M(\mu)$ της Εξ. (4.2.132), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \lambda^2 &= -\frac{1}{r^2 M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) \\ \Rightarrow \frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \lambda^2 r^2 &= -\frac{1}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) = n(n+1) \end{aligned} \quad (4.2.135)$$

$$\frac{1}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + n(n+1) = 0 \quad (4.2.136)$$

όπου $n(n+1)$ η σταθερά διαχωρισμού. Η λύση της Εξ. (4.2.136) δίνεται από την Εξ. (4.2.137)

ως

$$M(\mu) = A_2 P_n(\mu) + A_3 Q_n(\mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.137)$$

όπου $P_n(\mu)$ και $Q_n(\mu)$ τα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.130β) απαλείφεται όρος $A_3 Q_n(\mu)$ με $A_3 = 0$, καθώς όταν $\mu \rightarrow \pm 1 \rightarrow Q_n(\mu) = \infty$. Επομένως η συνάρτηση $M(\mu)$ δίνεται πλέον από την Εξ. (4.2.138):

$$M(\mu) = A_2 P_n(\mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.138)$$

Στη συνέχεια διαχωρίζεται ο όρος $R(r)$ της Εξ. (4.2.132) και προκύπτει η Εξ. (4.2.139) ως

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \lambda^2 r^2 - n(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.2.139)$$

Η Εξ. (4.2.139) είναι εξίσωση Bessel τάξης $(n + 1/2)$ με γενική λύση την Εξ. (4.2.140):

$$R(r) = A_4 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + A_5 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) \quad (4.2.140)$$

όπου $J_{n+\frac{1}{2}}$ και $Y_{n+\frac{1}{2}}$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.130α) για $r \rightarrow 0$ απαλείφεται ο όρος $A_5 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ με $A_5 = 0$, καθώς $Y_{n+\frac{1}{2}}(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως η Εξ. (4.2.140) γράφεται ως

$$R(r) = A_4 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) \quad (4.2.141)$$

Με αντικατάσταση της συνοριακής συνθήκης (4.2.130α) για $r = b$ στην Εξ. (4.2.141), προκύπτει:

$$\begin{aligned} R(r = b) = 0 &\Rightarrow A_4 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda b) = 0 \\ \Rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} b) = 0 &\rightarrow \lambda_{nm} \text{ για } m = 1, 2, 3, \dots \text{ για κάθε τιμή του } n \end{aligned} \quad (4.2.142)$$

Η γενική λύση $V(r, \mu, t)$ προκύπτει από την Εξ. (4.2.131) ως

$$\begin{aligned} V(r, \mu, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_4 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r) A_2 P_n(\mu) A_1 e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} \\ \Rightarrow V(r, \mu, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r) P_n(\mu) e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} \end{aligned} \quad (4.2.143)$$

με $A_{nm} = A_1 A_2 A_4$. Για τον υπολογισμό του A_{nm} αντικαθίσταται η αρχική συνθήκη (4.2.130γ) στην Εξ. (4.2.143) και προκύπτει η Εξ. (4.2.144) ως

$$r^{\frac{1}{2}} G(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r) P_n(\mu) \quad (4.2.144)$$

στην οποία εφαρμόζονται διαδοχικά τα ολοκληρώματα $\int_{r=0}^b r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nj} r) dr$ και $\int_{\mu=-1}^1 P_k(\mu) d\mu$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\mu=-1}^1 \int_{r=0}^b r^{\frac{1}{2}} G(r, \mu) r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nj} r) P_k(\mu) dr d\mu = \\ \int_{\mu=-1}^1 \int_{r=0}^b \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r) P_n(\mu) r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nj} r) P_k(\mu) dr d\mu \end{aligned} \quad (4.2.145)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας των $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r)$ και $P_n(\mu)$, για $j = m$ και $k = n$, προκύπτει το A_{nm} ως

$$A_{nm} = \frac{\int_{\mu=-1}^1 \int_{r=0}^b r^{\frac{3}{2}} G(r, \mu) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r) P_n(\mu) dr d\mu}{\int_{r=0}^b r J_{n+\frac{1}{2}}^2(\lambda_{nm} r) dr \int_{\mu=-1}^1 P_n(\mu)^2 d\mu} \quad (4.2.146)$$

Από το $V(r, \mu, t) = r^{\frac{1}{2}} \theta(r, \mu, t)$, η $\theta(r, \mu, t)$ γίνεται:

$$\theta(r, \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r)}{r^{\frac{1}{2}}} P_n(\mu) e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} \quad (4.2.147)$$

ενώ από το $\theta(r, \mu, t) = T(r, \mu, t) - T_1$, η ζητούμενη θερμοκρασία $T(r, \mu, t)$ δίνεται ως

$$T(r, \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r)}{r^{\frac{1}{2}}} P_n(\mu) e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} + T_1 \quad (4.2.148)$$

$T(r, \mu, \varphi, t)$ για Στερεά Σφαίρα

Έστω σφαίρα ακτίνας b στην οποία η θερμότητα μεταδίδεται στις διευθύνσεις r, μ και φ . Η αρχική θερμοκρασία της σφαίρας είναι $T(t = 0) = F(r, \mu, \varphi)$, ενώ στην επιφάνεια $r = b$, για $t > 0$, η θερμοκρασία είναι μηδέν. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.149), τις συνοριακές συνθήκες (4.2.150α), (4.2.150β), (4.2.150γ) και την αρχική συνθήκη (4.2.150δ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.2.149)$$

$$T(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad T(r = b) = 0 \quad (4.2.150\alpha)$$

$$T(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.2.150\beta)$$

$$T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi) \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (4.2.150\gamma)$$

$$T(t = 0) = F(r, \mu, \varphi) \quad (4.2.150\delta)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις το $V(r, \mu, \varphi, t) = r^{\frac{1}{2}} T(r, \mu, \varphi, t)$ προκύπτει το πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial t} \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.2.151)$$

$$V(r \rightarrow 0) \Rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad V(r = b) = 0 \quad (4.2.152\alpha)$$

$$V(\mu \rightarrow \pm 1) \Rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.2.152\beta)$$

$$V(\varphi) = V(\varphi + 2\pi) \rightarrow \text{περιοδικότητα } 2\pi \quad (4.2.152\gamma)$$

$$V(t = 0) = r^{\frac{1}{2}} F(r, \mu, \varphi) \quad (4.2.152\delta)$$

Όλες οι συνοριακές συνθήκες, εκτός την αρχική συνθήκη (4.2.152δ), είναι ομογενείς, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Θεωρούμε πως η θερμοκρασία $V(r, \mu, \varphi, t)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο τριών συναρτήσεων R, M, Φ και S , κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή r, μ, φ και t αντίστοιχα, και εκφράζεται από την Εξ. (4.2.153) ως

$$V(r, \mu, \varphi, t) = R(r)M(\mu)\Phi(\varphi)S(t) \quad (4.2.153)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.153) στην Εξ. (4.2.151), προκύπτει:

$$\begin{aligned} M\Phi S \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} M\Phi S \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} M\Phi S \frac{R}{r^2} + \frac{1}{r^2} R\Phi S \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} R M S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \\ \frac{1}{a} R M \Phi \frac{dS}{dt} \\ \Rightarrow \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2 M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{aS} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \end{aligned} \quad (4.2.154)$$

$$\frac{dS}{dt} + \lambda^2 a S = 0 \quad (4.2.155)$$

όπου λ^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η γενική λύση της Εξ. (4.2.155) δίνεται από την Εξ. (4.2.156) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.156)$$

Ακολουθεί ο διαχωρισμός του όρου $R(r)$ της Εξ. (4.2.154) ως εξής:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2 M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \lambda^2 \\ (\times r^2) \Rightarrow -\frac{1}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) - \frac{1}{(1-\mu^2)} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{4} \frac{R}{r^2} \right) + \lambda^2 r^2 = n(n+1) \end{aligned} \quad (4.2.157)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.2.158)$$

όπου $n(n+1)$ η σταθερά διαχωρισμού. Η Εξ. (4.2.158) είναι εξίσωση Bessel τάξης $(n+1/2)$ με γενική λύση την Εξ. (4.2.159):

$$R(r) = A_2 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + A_3 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) \quad (4.2.159)$$

όπου $J_{n+\frac{1}{2}}$ και $Y_{n+\frac{1}{2}}$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (α) για $r \rightarrow 0$ απαλείφεται όρος $A_3 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ με $A_3 = 0$, καθώς $Y_{n+\frac{1}{2}}(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως η Εξ. (4.2.159) γράφεται ως

$$R(r) = A_2 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) \quad (4.2.160)$$

Με αντικατάσταση της συνοριακής συνθήκης (α) για $r = b$ στην Εξ. (4.2.160), προκύπτει:

$$\begin{aligned} R(r = b) = 0 &\Rightarrow A_2 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda b) = 0 \\ \Rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} b) = 0 &\rightarrow \lambda_{nm} \text{ για } m = 1, 2, 3, \dots \text{ για κάθε τιμή του } n \end{aligned} \quad (4.2.161)$$

Στη συνέχεια η Εξ. (4.2.157) πολλαπλασιάζεται επί $(1 - \mu^2)$ και διαχωρίζεται ο όρος $\Phi(\varphi)$ ως εξής:

$$\frac{1-\mu^2}{M} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + (1 - \mu^2)n(n+1) = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = p^2 \quad (4.2.162)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + p^2 \Phi = 0 \quad (4.2.163)$$

όπου p^2 η σταθερά διαχωρισμού. Η λύση της Εξ. (4.2.163) δίνεται από την Εξ. (4.2.164) ως

$$\Phi(\varphi) = A_4 \cos p\varphi + A_5 \sin p\varphi \quad (4.2.164)$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη της περιοδικότητας 2π , Εξ. (4.2.152γ), θα πρέπει το p να είναι ακέραιος, δηλαδή $p = 0, 1, 2, \dots$

Τέλος, για τον όρο $M(\mu)$ της Εξ. (4.2.162) έχουμε:

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right) + \left(n(n+1) - \frac{p^2}{1-\mu^2} \right) M = 0 \quad (4.2.165)$$

η λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.2.166) ως

$$M(\mu) = A_6 P_n^p(\mu) + A_7 Q_n^p(\mu) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.166)$$

όπου $P_n^p(\mu)$ και $Q_n^p(\mu)$ τα προσαρτημένα (associated) πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, με $p \leq n$.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.2.152β) απαλείφεται όρος $A_7 Q_n^p(\mu)$ με $A_7 = 0$, καθώς όταν $\mu \rightarrow \pm 1 \rightarrow Q_n^p(\mu) = \infty$. Επομένως η συνάρτηση $M(\mu)$ δίνεται πλέον από την Εξ. (4.2.167):

$$M(\mu) = A_6 P_n^p(\mu) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.167)$$

Η λύση της $V(r, \mu, \varphi, t)$ προκύπτει από την Εξ. (4.2.153) ως

$$\begin{aligned}
V(r, \mu, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^n A_2 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm}r) A_6 P_n^p(\mu) (A_4 \cos p\varphi + \\
&\quad A_5 \sin p\varphi) A_1 e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} \\
\Rightarrow V(r, \mu, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^n J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm}r) P_n^p(\mu) (\alpha_{npm} \cos p\varphi + \beta_{npm} \sin p\varphi) e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t}
\end{aligned}
\tag{4.2.168}$$

όπου $\alpha_{npm} = A_1 A_2 A_4 A_6$ και $\beta_{npm} = A_1 A_2 A_5 A_6$. Στη συνέχεια αντικαθίσταται η αρχική συνθήκη (4.2.152δ) στην Εξ. (4.2.168) και προκύπτει η Εξ. (4.2.169) ως

$$r^{\frac{1}{2}} F(r, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^n J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm}r) P_n^p(\mu) (\alpha_{npm} \cos p\varphi + \beta_{npm} \sin p\varphi) \tag{4.2.169}$$

Για τον υπολογισμό του α_{npm} γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας, εφαρμόζοντας διαδοχικά τα ολοκληρώματα $\int_{r=0}^b r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nj}r) dr$, $\int_{\mu=-1}^1 P_k^p(\mu) d\mu$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos l\varphi d\varphi$, και για $j = m$, $k = n$ και $l = p$ προκύπτει:

$$\alpha_{npm} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 \int_{r=0}^b r^{\frac{3}{2}} F(r, \mu, \varphi) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm}r) P_n^p(\mu) \cos p\varphi dr d\mu d\varphi}{\int_{r=0}^b r J_{n+\frac{1}{2}}^2(\lambda_{nm}r) dr \int_{\mu=-1}^1 [P_n^p(\mu)]^2 d\mu \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 p\varphi d\varphi} \tag{4.2.170}$$

Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζεται και το β_{npm} , εφαρμόζοντας τα ολοκληρώματα $\int_{r=0}^b r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nj}r) dr$, $\int_{\mu=-1}^1 P_k^p(\mu) d\mu$ και $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin l\varphi d\varphi$, και για $j = m$, $k = n$ και $l = p$ προκύπτει:

$$\beta_{npm} = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 \int_{r=0}^b r^{\frac{3}{2}} F(r, \mu, \varphi) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm}r) P_n^p(\mu) \sin p\varphi dr d\mu d\varphi}{\int_{r=0}^b r J_{n+\frac{1}{2}}^2(\lambda_{nm}r) dr \int_{\mu=-1}^1 [P_n^p(\mu)]^2 d\mu \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 p\varphi d\varphi} \tag{4.2.171}$$

T(r, t) για Κοίλη Σφαίρα

Έστω κοίλη σφαίρα με $a \leq r \leq b$ η οποία βρίσκεται αρχικά σε θερμοκρασία $T(t=0) = F(r)$. Για $t > 0$ η συνοριακή επιφάνεια $r = a$ διαχέει θερμότητα μέσω συναγωγής σε ρευστό θερμοκρασίας T_{∞} , με συντελεστή συναγωγής h_1 , ενώ η επιφάνεια $r = b$ διαχέει θερμότητα μέσω συναγωγής σε ρευστό θερμοκρασίας T_{∞} , με συντελεστή συναγωγής h_2 .

Το πρόβλημα περιγράφεται με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a < r < b \quad (4.2.172)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} = h[T|_{r=a} - T_\infty] \quad (4.2.173\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = h[T|_{r=b} - T_\infty] \quad (4.2.173\beta)$$

$$T(t=0) = F(r) \quad (4.2.173\gamma)$$

Παρατηρείται πως οι συνοριακές συνθήκες (4.2.173α) και (4.2.173β) είναι μη ομογενείς. Επομένως, εισάγεται μια νέα μεταβλητή $\theta(r, t) = T(r, t) - T_\infty$ η οποία αντικαθίσταται στις παραπάνω σχέσεις και προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad a < r < b \quad (4.2.174)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=a} = h\theta|_{r=a} \quad (4.2.175\alpha)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=b} = h\theta|_{r=b} \quad (4.2.175\beta)$$

$$\theta(t=0) = F(r) - T_\infty = G(r) \quad (4.2.175\gamma)$$

Η Εξ. (4.2.174) μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\theta)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.2.176)$$

Θωρούμε μια νέα μεταβλητή $U = U(r, t)$ η οποία δίνεται από την Εξ. (4.2.175) ως

$$U(r, t) = r\theta(r, t), \quad (4.2.177)$$

η οποία αντικαθίσταται στην Εξ. (4.2.176) και προκύπτει η διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.178)

ως

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.2.178)$$

Στη συνέχεια μετατρέπονται και οι συνοριακές συνθήκες, έτσι ώστε η εξαρτημένη μεταβλητή να είναι η $U(r, t)$. Για την μετατροπή των συνοριακών συνθηκών (4.2.175α) και (4.2.175β), αναλύεται αρχικά η παράγωγος $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ ως εξής:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U \quad (4.2.179)$$

και με την αντικατάσταση της Εξ. (4.2.179) στις (4.2.175α) και (4.2.175β), προκύπτουν:

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) U|_{r=a} = 0 \quad (4.2.180)$$

και

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=b} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) U|_{r=b} = 0 \quad (4.2.181)$$

Τέλος η αρχική συνθήκη (4.2.175γ) γίνεται:

$$U(t = 0) = r(F(r) - T_{\infty}) = rG(r) \quad (4.2.182)$$

Το πρόβλημα πλέον αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση Εξ. (4.2.178), τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (4.2.180) και (4.2.181), και την αρχική συνθήκη (4.2.182).

Για την επίλυση της Εξ. (4.2.178), η συνάρτηση $U(r, t)$ εκφράζεται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $R(r)$ και $S(t)$ ως

$$U(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.2.183)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.2.183) στην (4.2.178), προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \quad (4.2.184)$$

όπου $-\lambda^2$ μια σταθερά χωρισμού. Επομένως ανακύπτουν οι εξισώσεις (4.2.185α) και (4.2.185β) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.2.185\alpha)$$

$$\frac{dS}{dt} + \lambda^2 S = 0 \quad (4.2.185\beta)$$

με γενικές λύσεις τις Εξ. (4.2.186α) και (4.2.186β):

$$R(r) = A_1 \cos \lambda r + A_2 \sin \lambda r \quad (4.2.186\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.2.186\beta)$$

Από την συνοριακή συνθήκη (4.2.180), προκύπτει:

$$\left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=a} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) R|_{r=a} = 0 \Rightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda a + A_2 \lambda \cos \lambda a + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) [A_1 \cos \lambda a +$$

$$A_2 \sin \lambda a] = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \left[-\lambda \sin \lambda a + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) \cos \lambda a \right] + A_2 \left[\lambda \cos \lambda a + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) \sin \lambda a \right] = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 \frac{\left[\lambda \sin \lambda a - \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) \cos \lambda a \right]}{\left[\lambda \cos \lambda a + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right) \sin \lambda a \right]}$$

ή

$$A_2 = A_1 \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \quad (4.2.187)$$

όπου $K_a = \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{a} \right)$. Ενώ από την συνοριακή συνθήκη (4.2.181):

$$\left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=b} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) R|_{r=b} = 0 \Rightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda b + A_2 \lambda \cos \lambda b + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) [A_1 \cos \lambda b + A_2 \sin \lambda b] = 0$$

$$(4.2.187) \quad \Rightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda b + A_1 \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \lambda \cos \lambda b + K_b \left[A_1 \cos \lambda b + A_1 \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \sin \lambda b \right] = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \left[-\lambda \sin \lambda b + \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \lambda \cos \lambda b + K_b \cos \lambda b + K_b \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \sin \lambda b \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \sin \lambda b + \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \lambda \cos \lambda b + K_b \cos \lambda b + K_b \frac{[\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a]}{[\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a]} \sin \lambda b = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \sin \lambda b [\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a] + \lambda \cos \lambda b [\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a] +$$

$$K_b \cos \lambda b [\lambda \cos \lambda a + K_a \sin \lambda a] + K_b \sin \lambda b [\lambda \sin \lambda a - K_a \cos \lambda a] = 0$$

$$\Rightarrow \tan \lambda_n (a - b) = \frac{\lambda_n [K_a - K_b]}{[\lambda_n^2 + K_a K_b]} \rightarrow \lambda_n \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.188)$$

Αθροίζοντας τις λύσεις (4.2.186β) και (4.2.186β), προκύπτει η Εξ. (4.2.189) ως

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 \cos \lambda_n r + A_2 \sin \lambda_n r) A_3 e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

$$\Rightarrow U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.2.189)$$

όπου $x_n = A_1 A_3$ και $y_n = A_2 A_3$. Στην Εξ. (4.2.189) μπορεί να εφαρμοστεί πλέον και η αρχική συνθήκη (4.2.182), από την οποία ανακύπτει η Εξ. (4.2.190) ως

$$rG(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r) \quad (4.2.190)$$

Για τον προσδιορισμό του x_n γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\cos \lambda_n r$, με την εφαρμογή του ολοκληρώματος $\int_{r=a}^b \cos \lambda_p r dr$ και στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.190), και για $p = n$ προκύπτει:

$$x_n = \frac{\int_{r=a}^b rG(r) \cos \lambda_n r dr}{\int_{r=a}^b \cos^2 \lambda_n r dr} \quad (4.2.191)$$

Αντίστοιχα, για τον προσδιορισμό του y_n , εφαρμόζεται το ολοκλήρωμα $\int_{r=a}^b \sin \lambda_p r dr$ και στα δύο μέλη της Εξ. (4.2.190), και για $p = n$ προκύπτει:

$$y_n = \frac{\int_{r=a}^b rG(r) \sin \lambda_n r dr}{\int_{r=a}^b \sin^2 \lambda_n r dr} \quad (4.2.192)$$

Εφόσον έχει υπολογιστεί η γενική λύση της μεταβλητής $U(r, t)$, μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί και η λύση $\theta(r, t)$ από την Εξ. (4.2.177), η οποία δίνεται από την Εξ. (4.2.193) ως

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.2.193)$$

Τέλος, η ζητούμενη λύση $T(r, t)$ προκύπτει από την σχέση $T(r, t) = \theta(r, t) + T_{\infty}$, και γράφεται ως

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} + T_{\infty} \quad (4.2.194)$$

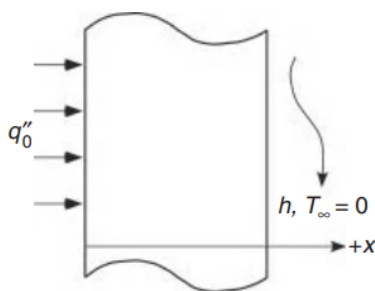
4.3 Μη Ομογενή Προβλήματα - Μέθοδος της Υπέρθεσης

Στην ενότητα 3.2 μελετήθηκαν μη ομογενή προβλήματα μόνιμης μετάδοσης θερμότητας σε καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Ο τρόπος επίλυσης μη ομογενών προβλημάτων με χρονικά μεταβλητή ροή θερμότητας, ακολουθεί την ίδια συλλογιστική με αυτή της ενότητας 3.2. Παρακάτω περιγράφεται η διαδικασία της υπέρθεσης για μη ομογενή συστήματα, για κάθε σύστημα συντεταγμένων.

4.3.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

$T = T(x, t)$ με Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες

Έστω τοίχωμα πάχους L , στο οποίο η θερμότητα μεταδίδεται μόνο κατά τη διεύθυνση x . Το τοίχωμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σε θερμοκρασία $T(x, t = 0) = F(x)$. Για $t > 0$ η επιφάνεια $x = 0$ εκτίθεται σε ροή θερμότητας q_0 , με φορά κατά τον θετικό άξονα x , ενώ από την επιφάνεια $x = L$ η θερμότητα μεταφέρεται μέσω συναγωγής προς ρευστό θερμοκρασίας $T_\infty = 0$. Στο Σχήμα 4.3.1 παρουσιάζεται το τοίχωμα με τις συνοριακές συνθήκες στις επιφάνειες $x = L$ και $x = 0$.



Σχήμα 4.3.1: Τοίχωμα πάχους L με ροή θερμότητας q_0 στο $x = 0$, και συνθήκη συναγωγής στο $x = L$ (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.1), και τις συνοριακές συνθήκες (4.3.2α) και (4.3.2β).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < L \quad (4.3.1)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = hT|_{x=L}, \quad (4.3.2\alpha)$$

$$T(x, t = 0) = F(x) \quad (4.3.2\beta)$$

Η συνοριακή συνθήκη (4.3.2α) για $x = 0$, και η αρχική συνθήκη (4.3.2β) είναι μη ομογενείς, συνεπώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Επομένως, η λύση $T(x, t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο λύσεων:

$$T(x, t) = T_H(x, t) + T_{SS}(x) \quad (4.3.3)$$

όπου $T_H(x, t)$ η λύση του συστήματος μη μόνιμης μετάδοσης θερμότητας, με ομογενείς συνοριακές συνθήκες, και $T_{SS}(x)$ η λύση του συστήματος μόνιμης μετάδοσης θερμότητας, με μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη.

Το ομογενές πρόβλημα ($T_H(x, t)$) περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση, Εξ. (4.3.4), τις συνοριακές συνθήκες (4.3.5α) και την αρχική συνθήκη (4.3.5β).

$$\frac{\partial^2 T_H}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_H}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.3.4)$$

$$-k \frac{\partial T_H}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad -k \frac{\partial T_H}{\partial x} \Big|_{x=L} = h T_H \Big|_{x=L}, \quad (4.3.5\alpha)$$

$$T(x, t = 0) = F(x) - T_{SS} = g(x) \quad (4.3.5\beta)$$

στο οποίο η συνοριακή συνθήκη (4.3.5α) για $x = 0$ έχει τεθεί ίση με το μηδέν (δηλαδή θεωρείται μονωμένη) και πλέον μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Ακολουθώντας τη γνωστή μεθοδολογία η λύση της Εξ. (4.3.4), είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων X και S , η κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x , και t , αντίστοιχα.

$$T_H(x, t) = X(x)S(t) \quad (4.3.6)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (4.3.6) στην (4.3.4), προκύπτει

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.3.7)$$

όπου $-\lambda^2$ η σταθερά διαχωρισμού. Άρα προκύπτουν δύο ομογενείς, γραμμικές, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha \lambda^2 S = 0, \quad (4.3.9)$$

με τις γενικές τους λύσεις

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (4.3.10)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda t} \quad (4.3.11)$$

Αντικαθιστώντας τη συνοριακή συνθήκη (4.3.5α) για $x = 0$ προκύπτει:

$$-k \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda \cdot 0 + A_2 \lambda \cos \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0,$$

ενώ για $x = L$:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=L} &= hX|_{x=L} \Rightarrow k A_1 \lambda \sin \lambda \cdot L = h A_1 \cos \lambda \cdot L \\ \Rightarrow \lambda_n \tan \lambda_n L &= \frac{h}{k}, \quad \lambda_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Από το γινόμενο των λύσεων $X(x)$ και $S(t)$, η θερμοκρασία $T_H(x, t)$, γράφεται ως

$$T_H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 t} \quad (4.3.13)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται και η αρχική συνθήκη (4.3.5β) και προκύπτει η Εξ. (4.3.14) ως

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x \quad (4.3.14)$$

Για τον προσδιορισμό του A_n εφαρμόζεται και στα δύο μέλη της Εξ. (4.3.14) το ολοκλήρωμα

$\int_{x=0}^L \cos \lambda_p x dx$, και για $p = n$ προκύπτει:

$$A_n = \frac{\int_{x=0}^L g(x) \cos \lambda_n x dx}{\int_{x=0}^L \cos^2 \lambda_n x dx} \quad (4.3.15)$$

Το μόνιμο πρόβλημα ($T_{SS}(x)$) περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.16), και τις συνοριακές συνθήκες (4.3.17α).

$$\frac{\partial^2 T_{SS}}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (4.3.16)$$

$$-k \frac{\partial T_{SS}}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0, \quad -k \frac{\partial T_{SS}}{\partial x} \Big|_{x=L} = h T_{SS}|_{x=L}, \quad (4.3.17\alpha)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.3.16) δίνεται από την Εξ. (4.3.18) ως

$$T_{SS}(x) = A_4 x + A_5 \quad (4.3.18)$$

Μετά από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (4.3.17α) για $x = 0$, προκύπτουν $A_4 =$

$-\frac{q_0}{k}$ και $A_5 = \frac{q_0}{kh} (k + hL)$, επομένως:

$$T_{SS}(x) = \frac{q_0}{k} (L - x) + \frac{q_0}{h} \quad (4.3.19)$$

Με τον προσδιορισμό των $T_H(x, t)$ και $T_{SS}(x)$, πραγματοποιείται ο προσδιορισμός της λύσης $T(x, t)$ μέσω της Εξ. (4.3.3) ως

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{q_0}{k} (L - x) + \frac{q_0}{h} \quad (4.3.20)$$

4.3.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$T = T(r, t)$ με Πηγή Θερμότητας

Έστω στερεός κύλινδρος μεγάλου μήκους και ακτίνας b , στον οποίο η θερμότητα μεταδίδεται μόνο κατά την διεύθυνση r . Για $t = 0$ η θερμοκρασία του κυλίνδρου είναι $T(t = 0) = F(r)$. Για $t > 0$ η επιφάνεια $r = b$ έχει θερμοκρασία $T(r = b) = 0$, ενώ για $r \rightarrow 0$ η θερμοκρασία είναι πεπερασμένη. Η εσωτερική παραγωγή θερμότητας δίνεται ίση με $\dot{g}$.

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.21), τις συνοριακές συνθήκες (4.3.22α) και την αρχική συνθήκη (4.3.22β) ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r < b, \quad t > 0 \quad (4.3.21)$$

$$T(r \rightarrow 0) = \text{πεπερασμένη}, \quad T(r = b) = 0 \quad (4.3.22\alpha)$$

$$T(t = 0) = F(r) \quad (4.3.22\beta)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο της υπέρθεσης η θερμοκρασία $T(r, t)$ περιγράφεται από την Εξ. (4.3.23) ως

$$T(r, t) = \Psi(r, t) + \Phi(r) \quad (4.3.23)$$

όπου $\Psi(r, t)$ η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή χωρίς τον όρο $\frac{\dot{g}}{k}$) και $\Phi(r)$ η λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Το πρόβλημα με γενική λύση την $\Psi(r, t)$ αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.24), τις συνοριακές συνθήκες (4.3.25α), και την αρχική συνθήκη (4.3.25β):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad 0 \leq r < b, \quad t > 0 \quad (4.3.24)$$

$$\Psi(r \rightarrow 0) = \text{πεπερασμένη}, \quad \Psi(r = b) = 0 \quad (4.3.25\alpha)$$

$$\Psi(t = 0) = F(r) - \Phi(r) = G(r) \quad (4.3.25\beta)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, θεωρούμε πως η Εξ. (4.3.24) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και S , η κάθε μία από τις οποίες είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής r και t αντίστοιχα, σύμφωνα με την Εξ. (4.3.26) ως

$$\Psi(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.3.26)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (4.3.26) στην Εξ. (4.3.24) και τον διαχωρισμό του όρου $S(t)$, προκύπτουν οι Εξ. (4.3.27) και (4.3.28) ως

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.3.27)$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.3.28)$$

η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.3.29) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.3.29)$$

Διαχωρίζοντας τον όρο $R(r)$ της Εξ. (4.3.27) προκύπτει η Εξ. (4.3.30) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.3.30)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ (βλέπε Παράρτημα Β). Η λύση της Εξ. (4.3.30) δίνεται από την Εξ. (4.3.31) ως

$$R(r) = A_2 J_0(\lambda r) + A_3 Y_0(\lambda r) \quad (4.3.31)$$

όπου J_0 και Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.3.25α) για $r \rightarrow 0$, ο όρος $A_3 Y_0(\lambda r)$ απαλείφεται καθώς $Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Άρα θα πρέπει ο συντελεστής A_3 να ισούται με μηδέν.

Η Εξ. (4.3.31) γράφεται ως

$$R(r) = A_2 J_0(\lambda r) \quad (4.3.32)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (4.3.25α) για $r = b$, προκύπτει:

$$A_2 J_0(\lambda b) = 0 \Rightarrow J_0(\lambda_n b) = 0 \Rightarrow \lambda_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας και αθροίζοντας από $n = 1$ έως ∞ , τις λύσεις $Z(z)$ και $S(t)$, προκύπτει η γενική λύση $\Psi(r, t)$ ως

$$\Psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.3.34)$$

όπου $A_n = A_1 A_2$. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (4.3.25β) η Εξ. (4.3.34) γίνεται:

$$G(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \quad (4.3.35)$$

Το A_n υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας του $J_0(\lambda_n r)$, με την εφαρμογή του $\int_{r=0}^b r J_0(\lambda_p r) dr$ στα δύο μέλη της Εξ. (4.3.35) και για $p = n$, το A_n υπολογίζεται από την Εξ. (4.3.36) ως

$$A_n = \frac{\int_{r=0}^b r G(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_{r=0}^b r J_0^2(\lambda_n r) dr} \quad (4.3.36)$$

Το μη ομογενές πρόβλημα με λύση την $\Phi(r)$, περιγράφεται από την Εξ. (4.3.37) και τις συνοριακές συνθήκες (4.3.38):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{g}{k} = 0, \quad 0 \leq r < b \quad (4.3.37)$$

$$\Phi(r \rightarrow 0) = \text{πεπερασμένη}, \quad \Phi(r = b) = 0 \quad (4.3.38)$$

Η λύση της Εξ. (4.3.37), δίνεται από την Εξ. (4.3.39) ως

$$\Phi(r) = A_4 + A_5 \ln(r) - \frac{\dot{g}}{4k} r^2 \quad (4.3.39)$$

Από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (4.3.38) για $r \rightarrow 0$, ο όρος $A_5 \ln(r)$ απαλείφεται, καθώς $\ln(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Πρέπει λοιπόν $A_5 = 0$. Για $r = b$, προκύπτει:

$$\Phi(r = b) = 0 \Rightarrow A_4 - \frac{\dot{g}}{4k} b^2 = 0 \Rightarrow A_4 = \frac{\dot{g}}{4k} b^2$$

Τελικά η γενική λύση, $\Phi(r)$ δίνεται από την Εξ. (4.3.40) ως

$$\Phi(r) = \frac{\dot{g}}{4k} (b^2 - r^2) \quad (4.3.40)$$

Αθροίζοντας τις λύσεις (4.3.34) και (4.3.40), προκύπτει η κατανομή της θερμοκρασίας $T(r, t)$ ως

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} + \frac{\dot{g}}{4k} (b^2 - r^2) \quad (4.3.41)$$

$T(r, z, t)$ με Μη Ομογενή Συνοριακή Συνθήκη και Πηγή Θερμότητας

Έστω στερεός κύλινδρος με $a \leq r \leq b$ και $0 \leq z \leq L$, ο οποίος βρίσκεται αρχικά σε θερμοκρασία $T(t = 0) = F(z)$. Για $t > 0$ οι συνοριακές επιφάνειες $z = 0$ και $z = L$ είναι μονωμένες, η επιφάνεια $r = b$ διαχύει θερμότητα σε ρευστό θερμοκρασίας T_{∞} , ενώ ο κύλινδρος παράγει εσωτερική θερμότητα $\dot{g}$ (W/m³). Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.42), τις συνοριακές συνθήκες (4.3.43α), (4.3.43β) και την αρχική συνθήκη (4.3.43γ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq b \quad \text{και} \quad 0 \leq z \leq L \quad (4.3.42)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (4.3.43\alpha)$$

$$T(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = h[T|_{r=b} - T_{\infty}] \quad (4.3.43\beta)$$

$$T(t = 0) = F(z) \quad (4.3.43\gamma)$$

Παρατηρείται πως η συνοριακή συνθήκη (4.3.43β) για $r = b$, είναι μη ομογενής όπως επίσης και η διαφορική εξίσωση (4.3.42), με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Για την αντιμετώπιση της μη ομογενούς συνοριακής συνθήκης, θεωρείται μια νέα μεταβλητή $\theta(r, z, t) = T(r, z, t) - T_{\infty}$ και με αντικατάστασή της στις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ένα νέο πρόβλημα με μερική διαφορική εξίσωση

(4.3.44), ομογενείς συνοριακές συνθήκες (4.3.45α), (4.3.45β) και αρχική συνθήκη (4.3.45γ), ως εξής:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq b \quad \text{και} \quad 0 \leq z \leq L \quad (4.3.44)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (4.3.45\alpha)$$

$$\theta(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=b} = h\theta|_{r=b} \quad (4.3.45\beta)$$

$$\theta(t = 0) = F(z) - T_\infty = G(z) \quad (4.3.45\gamma)$$

Το πρόβλημα με γενική λύση τη $\theta(r, z, t)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο προβλημάτων: ενός ως προς $\Psi(r, z, t)$ το οποίο είναι μη μόνιμο και περιλαμβάνει την ομογενή διαφορική εξίσωση (δηλαδή χωρίς τον όρο $\frac{\dot{g}}{k}$), και ενός ως προς $\Phi(r)$ το οποίο είναι μόνιμο και περιλαμβάνει τον όρο της πηγής $\frac{\dot{g}}{k}$. Η επιλογή του $\Phi = \Phi(r)$ εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες, από τις οποίες παρατηρείται πως λόγω των μονωμένων επιφανειών $z = 0$ και $z = L$, η συνάρτηση Φ δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση z . Άρα το μη ομογενές μόνιμο πρόβλημα, περιγράφεται από τη μη ομογενή εξίσωση Εξ. (4.3.46) και τις συνοριακές συνθήκες (4.3.47):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\dot{g}}{k} = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (4.3.46)$$

$$\Phi(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} = h\Phi|_{r=b} \quad (4.3.47)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.3.46) δίνεται από την Εξ. (4.3.48) ως

$$\Phi(r) = A_1 + A_2 \ln r - \frac{\dot{g}}{4k} r^2 \quad (4.3.48)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη για $r \rightarrow 0$ προκύπτει ότι $\ln(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, άρα ο συντελεστής A_2 πρέπει να ισούται με μηδέν. Με αντικατάσταση την συνοριακής συνθήκης για $r = b$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} -k \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} &= h\Phi|_{r=b} \Rightarrow \frac{\dot{g}}{2} b = hA_1 - h \frac{\dot{g}}{4k} b^2 \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{\dot{g}}{2h} b + \frac{\dot{g}}{4k} b^2 \end{aligned}$$

Άρα η γενική λύση της Εξ. (4.3.46) δίνεται από την Εξ. (4.3.49) ως

$$\Phi(r) = \frac{\dot{g}}{2h} b + \frac{\dot{g}}{4k} (b^2 - r^2) \quad (4.3.49)$$

Το μη μόνιμο πρόβλημα περιγράφεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq b \quad \text{και} \quad 0 \leq z \leq L \quad (4.3.50)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (4.3.51\alpha)$$

$$\Psi(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=b} = h \Psi|_{r=b} \quad (4.3.51\beta)$$

$$\Psi(t = 0) = G(z) - \Phi(r) = H(r, z) \quad (4.3.51\gamma)$$

όπου όλες οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς, οπότε η συνάρτηση $\Psi(r, z, t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\Psi(r, z, t) = R(r)Z(z)S(t) \quad (4.3.52)$$

η οποία αντικαθίσταται στην Εξ. (4.3.50) και μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $S(t)$, προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (4.3.53)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.3.54)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.3.54) δίνεται από την Εξ. (4.3.55) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.3.55)$$

Η Εξ. (4.3.53) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$ γίνεται:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \lambda^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta^2 \quad (4.3.56)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (4.3.57)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.3.57) δίνεται από την Εξ. (4.3.58) ως

$$Z(z) = A_2 \cos \beta z + A_3 \sin \beta z \quad (4.3.58)$$

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (4.3.58) τη συνοριακή συνθήκη (4.3.51α) για $z = 0$, προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow -A_2 \beta \sin \beta \cdot 0 + A_3 \beta \cos \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_3 = 0$$

ενώ για $z = L$:

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \Rightarrow -A_2 \beta \sin \beta \cdot L = 0 \Rightarrow \sin \beta \cdot L = 0 \rightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{L}, \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.59)$$

Τέλος, η Εξ. (4.3.53) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\lambda^2 - \beta^2) R = 0 \quad (4.3.60)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, με γενική λύση την Εξ. (4.3.61):

$$R(r) = A_4 J_0(\eta r) + A_5 Y_0(\eta r) \quad (4.3.61)$$

όπου $\eta^2 = \lambda^2 - \beta^2$ και J_0, Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Από την συνοριακή συνθήκη (4.3.51β) για $r \rightarrow 0$, προκύπτει ότι $A_5 = 0$, καθώς $Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως η Εξ. (4.3.61) γράφεται ως

$$R(r) = A_4 J_0(\eta r) \quad (4.3.62)$$

Για $r = b$ ισχύει:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial R}{\partial r} \Big|_{r=b} &= hR|_{r=b} \Rightarrow -kA_4 J'_0(\eta b) = hA_4 J_0(\eta b) \\ \Rightarrow k\eta J_1(\eta b) &= hJ_0(\eta b) \Rightarrow \gamma J_1(\gamma) = BiJ_0(\gamma) \rightarrow \gamma_m \text{ για } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

όπου $\gamma = \eta b$. Οι ιδιοτιμές λ δίνονται από την Εξ. (4.3.64) ως

$$\lambda_{nm}^2 = \beta_n^2 + \eta_m^2 \quad (4.3.64)$$

Αθροίζοντας το γινόμενο των Εξ. (4.3.58) και (4.3.62), προκύπτει:

$$\Psi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(\eta_m r) \cos \beta_n z e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t} \quad (4.3.65)$$

όπου $A_{nm} = A_1 A_2 A_4$. Τέλος, εφαρμόζεται και η αρχική συνθήκη (4.3.51γ):

$$H(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(\eta_m r) \cos \beta_n z \quad (4.3.66)$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή A_{nm} γίνεται χρήση της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel, $J_0(\eta_m r)$ και της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\cos \beta_n z$, εφαρμόζοντας διαδοχικά και στα δύο μέλη της Εξ. (4.3.66) τα ολοκληρώματα $\int_{r=0}^b r J_0(\eta_j r) dr$ και $\int_{z=0}^L \cos \beta_k z dz$, και για $j = m$ και $k = n$, ο συντελεστής A_{nm} προκύπτει ως

$$A_{nm} = \frac{\int_{z=0}^L \int_{r=0}^b r H(r, z) J_0(\eta_m r) \cos \beta_n z dr dz}{\int_{r=0}^b r J_0^2(\eta_m r) dr \int_{z=0}^L \cos^2 \beta_n z dz} \quad (4.3.67)$$

Τελικά η θερμοκρασιακή κατανομή $\theta(r, z, t)$ δίνεται από το άθροισμα των Εξ. (4.3.49) και (4.3.65) ως

$$\theta(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} J_0(\eta_m r) \cos \beta_n z e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t}] + \frac{\dot{q}}{2h} b + \frac{\dot{q}}{4k} (b^2 - r^2) \quad (4.3.68)$$

ενώ η ζητούμενη θερμοκρασιακή κατανομή $T(r, z, t)$ δίνεται από την Εξ. (4.3.69) ως

$$T(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} J_0(\eta_m r) \cos \beta_n z e^{-\alpha \lambda_{nm}^2 t}] + \frac{\dot{q}}{2h} b + \frac{\dot{q}}{4k} (b^2 - r^2) + T_{\infty} \quad (4.3.69)$$

Παρατηρείται πως για $t \rightarrow \infty$ προκύπτει, όπως είναι αναμενόμενο, η λύση του μόνιμου, μονοδιάστατου προβλήματος:

$$T(r) = \frac{\dot{q}}{2h} b + \frac{\dot{q}}{4k} (b^2 - r^2) + T_{\infty} \quad (4.3.70)$$

4.3.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

$T = T(r, t)$ με Πηγή Θερμότητας

Έστω στερεά σφαίρα ακτίνας b , στην οποία η θερμότητα μεταδίδεται μόνο κατά τη διεύθυνση r . Για $t = 0$ η θερμοκρασία της σφαίρας είναι $T(t = 0) = F(r)$. Για $t > 0$ η επιφάνεια $r = b$ έρχεται σε επαφή με ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας ($T_\infty = 0$), ενώ για $r \rightarrow 0$ η θερμοκρασία είναι πεπερασμένη. Η εσωτερική παραγωγή θερμότητας δίνεται ίση με $\dot{g}$.

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.71) και τις συνοριακές συνθήκες (4.3.72α) και την αρχική συνθήκη (4.3.72β) ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r < b, \quad t > 0 \quad (4.3.71)$$

$$T(r \rightarrow 0) = \text{πεπερασμένη}, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=b} = hT|_{r=b} \quad (4.3.72\alpha)$$

$$T(t = 0) = F(r) \quad (4.3.72\beta)$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (rT)}{\partial r} \right) \right] = \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Επομένως η Εξ. (4.3.71) μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3.73)$$

Θωρούμε μια νέα μεταβλητή $U = U(r, t)$ η οποία δίνεται από την Εξ. (4.3.74) ως

$$U(r, t) = rT(r, t) \quad (4.3.74)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.3.74) στην (4.3.73) προκύπτει η διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.75):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\dot{g}}{k} r = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4.3.75)$$

η οποία έχει την ίδια μορφή με την μη ομογενή εξίσωση μετάδοσης θερμότητας στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Οι συνοριακές συνθήκες και η αρχική συνθήκη δίνονται από τις Εξ. (4.3.76α) και (4.3.76β) (βλέπε ενότητα 4.2.3) ως

$$U(r = 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=b} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) U|_{r=b} = 0 \quad (4.3.76\alpha)$$

$$U(t = 0) = rF(r) \quad (4.3.76\beta)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο της υπέρθεσης η θερμοκρασία $U(r, t)$ δίνεται από την Εξ. (4.3.77) ως

$$U(r, t) = \Psi(r, t) + \Phi(r) \quad (4.3.77)$$

όπου $\Psi(r, t)$ η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή χωρίς τον όρο $\frac{\dot{q}}{k}$) και $\Phi(r)$ η λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Το πρόβλημα με γενική λύση την $\Psi(r, t)$ αποτελείται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.78), τις συνοριακές συνθήκες (4.3.79α), και την αρχική συνθήκη (4.3.79β):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad 0 \leq r < b, \quad t > 0 \quad (4.3.78)$$

$$\Psi(r = 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=b} + K\Psi|_{r=b} = 0 \quad (4.3.79\alpha)$$

$$\Psi(t = 0) = rF(r) - \Phi(r) = G(r) \quad (4.3.79\beta)$$

$$\text{με } K = \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right).$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, θεωρούμε πως η Εξ. (4.3.78) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων R και S , η κάθε μία από τις οποίες είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής r και t αντίστοιχα, σύμφωνα με την Εξ. (4.3.80):

$$\Psi(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.3.80)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (4.3.80) στην Εξ. (4.3.78) και τον διαχωρισμό του όρου t , προκύπτουν οι Εξ. (4.3.81) και (4.3.82):

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.3.81)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.3.82)$$

η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.3.83) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.3.83)$$

Διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $R(r)$ της Εξ. (4.3.81) προκύπτει η Εξ. (4.3.4) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.3.84)$$

Με γενική λύση την Εξ. (4.3.85):

$$R(r) = A_2 \cos \lambda r + A_3 \sin \lambda r \quad (4.3.85)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.3.79α) για $r = 0$, προκύπτει ότι $A_2 = 0$, ενώ για $r = b$:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r=b} + KR|_{r=b} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_3 \lambda \cos \lambda b + K A_3 \sin \lambda b &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_n \cot \lambda_n b &= -K, \quad \lambda_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα $R(r)$ και $S(t)$ και αθροίζοντας από $n = 1$ έως ∞ , προκύπτει η γενική λύση $\Psi(r, t)$ ως

$$\Psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n r e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.3.87)$$

όπου $A_n = A_1 A_3$. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (4.3.79β) η Εξ. (4.3.87) γίνεται:

$$G(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n r \quad (4.3.88)$$

Το A_n υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\sin \lambda_n r$, με την εφαρμογή του ολοκληρώματος $\int_{r=0}^b \sin \lambda_p r dr$ στα δύο μέλη της Εξ. (4.3.88) και για $p = n$ το A_n ισούται με:

$$A_n = \frac{\int_{r=0}^b G(r) \sin \lambda_n r dr}{\int_{r=0}^b \sin^2 \lambda_n r dr} \quad (4.3.89)$$

Το μη ομογενές πρόβλημα με λύση την $\Phi(r)$, περιγράφεται από την Εξ. (4.3.90) και τις συνοριακές συνθήκες (4.3.91) ως

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\dot{g}r}{k} = 0, \quad 0 \leq r < b \quad (4.3.90)$$

$$\Phi(r=0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} + K \Phi|_{r=b} = 0 \quad (4.3.91)$$

Η Εξ. (4.3.89) είναι μια συνήθης μη ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, και η λύση της δίνεται από την Εξ. (4.3.92) ως

$$\Phi(r) = A_4 + A_5 r - \frac{\dot{g}}{6k} r^3 \quad (4.3.92)$$

Από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (4.3.91) για $r = 0$, προκύπτει $A_4 = 0$. Για $r = b$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} + K \Phi|_{r=b} = 0 &\Rightarrow A_5 - \frac{\dot{g}}{2k} b^2 + K \left(A_5 b - \frac{\dot{g}}{6k} b^3 \right) = 0 \\ \Rightarrow A_5 &= \frac{b\dot{g}}{6h} \left(2 + \frac{hb}{k} \right) \end{aligned} \quad (4.3.93)$$

Η γενική λύση $\Phi(r)$ μετά από αντικατάσταση του A_5 , δίνεται από την Εξ. (4.3.94) ως

$$\Phi(r) = \frac{b\dot{g}}{6h} \left(2 + \frac{hb}{k} \right) r - \frac{\dot{g}}{6k} r^3 \quad (4.3.94)$$

Αθροίζοντας τις λύσεις (4.3.87) και (4.3.94) και διαιρώντας με το r , προκύπτει η κατανομή της θερμοκρασίας $T(r, t)$ ως

$$T(r, t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n r}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} + \frac{b\dot{g}}{6h} \left(2 + \frac{hb}{k} \right) - \frac{\dot{g}}{6k} r^2 \quad (4.3.95)$$

Σημειώνεται πως ο όρος $\left[\frac{b\dot{g}}{6h} \left(2 + \frac{hb}{k} \right) - \frac{\dot{g}}{6k} r^2 \right]$ της Εξ. (4.3.95), αποτελεί λύση του μονοδιάστατου προβλήματος μόνιμης μετάδοσης θερμότητας σε σφαίρα, παρουσία πηγής θερμότητας.

$T = T(r, t)$ σε Κοίλη Σφαίρα με Πηγή Θερμότητας

Έστω κοίλη σφαίρα με $a \leq r \leq b$ η οποία βρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία $T(t = 0) = F(r)$. Για $t > 0$ η συνοριακή επιφάνεια $r = a$ διατηρείται σε θερμοκρασία $T(r = a) = T_1$, ενώ η επιφάνεια $r = b$ διατηρείται σε θερμοκρασία $T(r = b) = T_2$.

Το πρόβλημα περιγράφεται από την εξίσωση (4.3.96), τις συνοριακές συνθήκες (4.3.97α) και (4.3.97β), και την αρχική συνθήκη (4.3.97γ), ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a < r < b, \quad t > 0 \quad (4.3.96)$$

$$T(r = a) = T_1 \quad (4.3.97\alpha)$$

$$T(r = b) = T_2 \quad (4.3.97\beta)$$

$$T(t = 0) = F(r) \quad (4.3.97\gamma)$$

Παρατηρείται πως η μερική διαφορική εξίσωση καθώς και οι συνοριακές συνθήκες, είναι μη ομογενείς. Για τον λόγο αυτόν, το πρόβλημα $T(r, t)$ γράφεται ως άθροισμα δύο προβλημάτων $T_H(r, t)$ και $T_{SS}(r)$:

$$T(r, t) = T_H(r, t) + T_{SS}(r) \quad (4.3.98)$$

όπου $T_H(r, t)$ το ομογενές (με ομογενή διαφορική εξίσωση και ομογενείς συνοριακές συνθήκες), μη μόνιμο πρόβλημα, και $T_{SS}(r)$ το μη ομογενές, μόνιμο πρόβλημα.

Το πρόβλημα $T_H(r, t)$ μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 T_H}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_H}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_H}{\partial t}, \quad a < r < b, \quad t > 0 \quad (4.3.99)$$

$$T_H(r = a) = 0 \quad (4.3.100\alpha)$$

$$T_H(r = b) = 0 \quad (4.3.100\beta)$$

$$T_H(t = 0) = F(r) - T_{SS}(r) = G(r) \quad (4.3.100\gamma)$$

Η Εξ. (4.3.99) μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT_H)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_H}{\partial t} \quad (4.3.101)$$

Θωρούμε μια νέα μεταβλητή $U = U(r, t)$ η οποία δίνεται από την Εξ. (4.3.102) ως

$$U(r, t) = rT_H(r, t) \quad (4.3.102)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.3.102) στην (4.3.101) προκύπτει η διαφορική εξίσωση Εξ. (4.3.103)

ως

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3.103)$$

η οποία έχει τη μορφή της εξίσωσης μονοδιάστατης μετάδοσης θερμότητας στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια μετατρέπονται και οι συνοριακές συνθήκες, έτσι ώστε η εξαρτημένη μεταβλητή να είναι η $U(r, t)$.

$$U(r = a) = 0 \quad (4.3.104\alpha)$$

$$U(r = b) = 0, \quad (4.3.104\beta)$$

ενώ η αρχική συνθήκη γράφεται ως

$$U = rG(r) \quad (4.3.104\gamma)$$

Για την επίλυση της Εξ. (4.3.103), η συνάρτηση $U(r, t)$ εκφράζεται ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $R(r)$ και $S(t)$ ως

$$U(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.3.105)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.3.105) στην (4.3.103), προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \quad (4.3.106)$$

όπου $-\lambda^2$ η σταθερά διαχωρισμού. Επομένως ανακύπτουν οι εξισώσεις (4.3.107α) και (4.3.107β) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.3.107\alpha)$$

$$\frac{dS}{dt} + \lambda^2 S = 0 \quad (4.3.107\beta)$$

με γενικές λύσεις τις Εξ. (4.3.108α) και (4.3.108β):

$$R(r) = A_1 \cos \lambda r + A_2 \sin \lambda r \quad (4.3.108\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.3.108\beta)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (4.3.104α), προκύπτει:

$$R(r = a) = 0 \Rightarrow A_1 \cos \lambda a + A_2 \sin \lambda a = 0 \Rightarrow A_2 = -A_1 \cot \lambda a$$

ενώ από τη συνοριακή συνθήκη (4.3.107β):

$$R(r = b) = 0 \Rightarrow A_1 \cos \lambda b + A_2 \sin \lambda b = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \cos \lambda b - A_1 \cot \lambda a \sin \lambda b = 0$$

$$\Rightarrow \cot \lambda_n a = \cot \lambda_n b \rightarrow \lambda_n \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.109)$$

Η θερμοκρασία $U(r, t)$ δίνεται από την Εξ. (4.3.110) ως

$$\begin{aligned} U(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 \cos \lambda_n r + A_2 \sin \lambda_n r) A_3 e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \\ \Rightarrow U(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \end{aligned} \quad (4.3.110)$$

όπου $x_n = A_1 A_3$ και $y_n = A_2 A_3$. Στην Εξ. (4.3.110) μπορεί να εφαρμοστεί πλέον και η αρχική συνθήκη (4.2.182), από την οποία ανακύπτει η Εξ. (4.3.111) ως

$$rG(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r) \quad (4.3.111)$$

Για τον προσδιορισμό του x_n γίνεται χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\cos \lambda_n r$, με την εφαρμογή του ολοκληρώματος $\int_{r=a}^b \cos \lambda_p r dr$ και στα δύο μέλη της Εξ. (4.3.111), και για $p = n$ προκύπτει:

$$x_n = \frac{\int_{r=a}^b rG(r) \cos \lambda_n r dr}{\int_{r=a}^b \cos^2 \lambda_n r dr} \quad (4.3.112)$$

Αντίστοιχα, για τον προσδιορισμό του y_n , εφαρμόζεται το ολοκλήρωμα $\int_{r=a}^b \sin \lambda_p r dr$ και στα δύο μέλη της Εξ. (4.3.111), και για $p = n$ προκύπτει:

$$y_n = \frac{\int_{r=a}^b rG(r) \sin \lambda_n r dr}{\int_{r=a}^b \sin^2 \lambda_n r dr} \quad (4.3.113)$$

Εφόσον έχει υπολογιστεί η γενική λύση της μεταβλητής $U(r, t)$, μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί και η λύση $T_H(r, t)$ από την Εξ. (4.3.102), η οποία δίνεται από την Εξ. (4.3.114) ως

$$T_H(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (4.3.114)$$

Το πρόβλημα $T_{SS}(r)$ περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{d^2 T_{SS}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT_{SS}}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.115)$$

$$T_{SS}(r = a) = T_1 \quad (4.3.116\alpha)$$

$$T_{SS}(r = b) = T_2 \quad (4.3.116\beta)$$

Παρατηρείται πως εξακολουθεί να είναι αδύνατη η χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών, καθώς τόσο η Εξ. (4.3.115), όσο και οι συνοριακές συνθήκες (4.3.116α) και (4.3.116β) είναι μη ομογενείς. Επομένως το πρόβλημα $T_{SS}(r)$ γράφεται ως

$$T_{SS}(r) = T_A(r) + T_B(r) \quad (4.3.117)$$

όπου $T_A(r)$ είναι το πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει την ομογενή διαφορική εξίσωση και τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες, και $T_B(r)$ το πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει την μη ομογενή διαφορική εξίσωση (με τον όρο $\frac{\dot{q}}{k}$) και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Το πρώτο πρόβλημα, $T_A(r)$, περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{d^2 T_A}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT_A}{dr} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.118)$$

$$T_A(r = a) = T_1 \quad (4.3.119\alpha)$$

$$T_A(r = b) = T_2 \quad (4.3.119\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (4.3.119α) και (4.3.119β) είναι μη ομογενείς, επομένως δεν μπορεί να γίνει χωρισμός των μεταβλητών. Για την αντιμετώπιση των μη ομογενών συνοριακών συνθηκών, το πρόβλημα γράφεται ως άθροισμα δύο προβλημάτων, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει μόνο μία μη ομογενή συνοριακή συνθήκη. Τα δύο αυτά προβλήματα περιγράφονται ως εξής:

$$\frac{d^2 T_{A1}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT_{A1}}{dr} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.120)$$

$$T_{A1}(r = a) = T_1 \quad (4.3.121\alpha)$$

$$T_{A1}(r = b) = 0 \quad (4.3.121\beta)$$

και

$$\frac{d^2 T_{A2}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT_{A2}}{dr} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.122)$$

$$T_{A2}(r = a) = 0 \quad (4.3.123\alpha)$$

$$T_{A2}(r = b) = T_2 \quad (4.3.123\beta)$$

Στα παραπάνω προβλήματα, μπορεί να γίνει εισαγωγή της νέας μεταβλητής $U(r) = rT(r)$, επομένως ξανά γράφονται ως

$$\frac{d^2 U_{A1}}{dr^2} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.124)$$

$$U_{A1}(r = a) = rT_1 \quad (4.3.125\alpha)$$

$$U_{A1}(r = b) = 0 \quad (4.3.125\beta)$$

και

$$\frac{d^2 U_{A2}}{dr^2} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.126)$$

$$U_{A2}(r = a) = 0 \quad (4.3.127\alpha)$$

$$U_{A2}(r = b) = rT_2 \quad (4.3.127\beta)$$

Η γενικές λύσεις των Εξ. (4.3.124) και (4.3.126) δίνονται ως

$$U_{A1}(r) = A_4 r + A_5 \quad (4.3.128\alpha)$$

$$U_{A2}(r) = A_6 r + A_7 \quad (4.3.128\beta)$$

Και μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών:

$$U_{A1}(r) = \frac{aT_1}{a-b}(r-b) \quad (4.3.129\alpha)$$

$$U_{A2}(r) = \frac{bT_2}{b-a}(r-a) \quad (4.3.129\beta)$$

ή

$$T_{A1}(r) = \frac{aT_1}{r(a-b)}(r-b) \quad (4.3.130\alpha)$$

$$T_{A2}(r) = \frac{bT_2}{r(b-a)}(r-a) \quad (4.3.130\beta)$$

Η γενική λύση $T_A(r)$ προκύπτει από το άθροισμα των Εξ. (4.3.130α) και (4.3.130β) ως

$$\begin{aligned} T_A(r) &= \frac{aT_1}{r(a-b)}(r-b) + \frac{bT_2}{r(b-a)}(r-a) \\ \Rightarrow T_A(r) &= \frac{1}{r(a-b)}[T_1 a(r-b) - T_2 b(r-a)] \end{aligned} \quad (4.3.131)$$

Το πρόβλημα $T_B(r)$ περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{d^2 T_B}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT_B}{dr} + \frac{g}{k} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.132)$$

$$T_B(r=a) = 0 \quad (4.3.133\alpha)$$

$$T_B(r=b) = 0 \quad (4.3.133\beta)$$

Εισάγοντας την μεταβλητή $U_B = rT_B$, οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως

$$\frac{d^2 U_B}{dr^2} + \frac{gr}{k} = 0, \quad a < r < b \quad (4.3.134)$$

$$U_B(r=a) = 0 \quad (4.3.135\alpha)$$

$$U_B(r=b) = 0 \quad (4.3.135\beta)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.3.134) δίνεται ως

$$U_B(r) = A_8 + A_9 r - \frac{gr^3}{6k} \quad (4.3.136)$$

Και μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών προκύπτει:

$$U_B(r) = \frac{g[-ba(b+a) + ba^2 r(b+a) - r^3]}{6k} \quad (4.3.137)$$

Από την σχέση $U_B = rT_B$, η θερμοκρασία $T_B(r)$ γράφεται ως

$$T_B(r) = \frac{g[-ba(b+a) + ba^2 r(b+a) - r^3]}{6kr} \quad (4.3.138)$$

Το πρόβλημα $T_{SS}(r)$ εκφράζεται ως άθροισμα των Εξ. (4.3.131) και (4.3.138):

$$T_{SS}(r) = T_A(r) + T_B(r) = \frac{1}{r(a-b)} [T_1 a(r-b) - T_2 b(r-a)] + \frac{\dot{q}[-ba(b+a) + ba^2 r(b+a) - r^3]}{6kr} \quad (4.3.139)$$

Τελικά, η ζητούμενη θερμοκρασιακή κατανομή $T(r, t)$, υπολογίζεται ως άθροισμα των Εξ. (4.3.114) και (4.3.139):

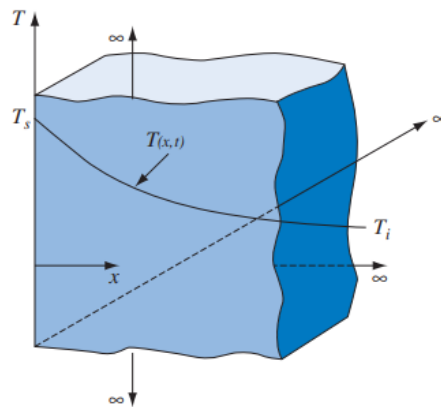
$$T(r, t) = T_H(r, t) + T_{SS}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n \cos \lambda_n r + y_n \sin \lambda_n r)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} + \frac{1}{r(a-b)} [T_1 a(r-b) - T_2 b(r-a)] + \frac{\dot{q}[-ba(b+a) + ba^2 r(b+a) - r^3]}{6kr} \quad (4.3.140)$$

4.4 Ημι-Άπειρα Χωρία

Στις προηγούμενες ενότητες επιλύθηκαν γεωμετρίες αντιπροσωπευτικές για κάθε σύστημα συντεταγμένων, με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζεται μια νέα γεωμετρία, τα ημι-άπειρα χωρία, και περιγράφεται η διαδικασία προσδιορισμού της θερμοκρασιακής κατανομής με την χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Σημειώνεται, πως σε αντίθεση με τα παραδείγματα που επιλύθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια, οι σταθερές που προκύπτουν από τον χωρισμό των μεταβλητών δεν υπολογίζονται, όπως επίσης δεν παράγονται ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις. Τα προβλήματα μετάδοσης θερμότητας σε ημι-άπειρα χωρία μπορεί να είναι είτε ομογενή, είτε μη ομογενή, καθώς και να περιγράφονται με καρτεσιανές, κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες. Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιείται αναλυτική περιγραφή και επίλυση ομογενών προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας σε ημι-άπειρα χωρία.

Τα στερεά των οποίων οι επιφάνειες εκτός από μία εκτείνονται στο άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις (θετικά και αρνητικά των αξόνων), όπως στο Σχήμα 4.1.1, ονομάζονται ημι-άπειρα. Σε ένα τέτοιο σώμα (το οποίο είναι ιδεατό) η θερμότητα δεν μπορεί να μεταδοθεί από τη μία επιφάνεια στην άλλη, σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, λόγω των μεγάλων διαστάσεων. Η θερμοκρασία μεταβάλλεται σε μία από τις τρεις διευθύνσεις, και για τον λόγο αυτό η μετάδοση της θερμότητας χαρακτηρίζεται ως μονοδιάστατη. Ωστόσο, είναι εφικτό μόνο μία από τις τρεις επιφάνειες να εκτείνεται στο άπειρο, ενώ οι άλλες δύο να θεωρούνται επίπεδες επιφάνειες, και σε αυτή την περίπτωση η μετάδοση θερμότητας χαρακτηρίζεται ως

διδιάστατη. Ημι-άπειρο στερεό μπορεί να θεωρηθεί ένα κομμάτι χάλυβα αυθαίρετου σχήματος κατά τη διάρκεια σκλήρυνσής του, μια πλάκα ή ένα τοίχωμα με μήκος και πλάτος πολύ μεγαλύτερα από το πάχος. Εάν $T(x, 0) = T_i$ η ομοιόμορφη αρχική θερμοκρασία του σώματος, μετά την επιβολή των συνοριακών συνθηκών η επιφάνεια $0 \leq x \leq \infty$ θα βρίσκεται σε θερμοκρασία $T(0, t) = T_s$, ενώ η θερμοκρασία στο εσωτερικό του σώματος ($x = \infty$) δεν θα μεταβληθεί και θα παραμείνει ίση με $T(\infty, t) = T_i$ (Kothandaraman, 2006, Kreith et al., 2010).

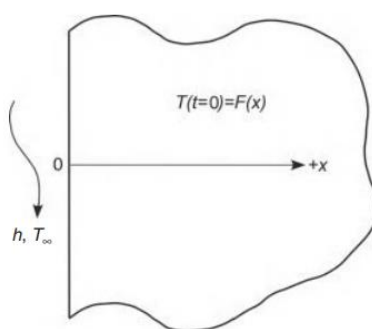


Σχήμα 4.4.1: Μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας σε ημι-άπειρο στερεό (Kreith et al., 2010).

4.4.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Ημι-άπειρο χωρίο με συνοριακή συνθήκη Συναγωγής

Έστω ημι-άπειρο στερεό με επίπεδη επιφάνεια $0 \leq x \leq \infty$, όπως στο Σχήμα 4.4.2. Για $t = 0$ η θερμοκρασία είναι ίση με $T(x, 0) = F(x)$. Για $t > 0$, η συνοριακή επιφάνεια $x = 0$ μεταδίδει θερμότητα μέσω συναγωγής σε ρευστό θερμοκρασίας $T_\infty = 0$.



Σχήμα 4.4.2: Ημι-άπειρο στερεό με μετάδοση θερμότητας στην ημι-άπειρη επιφάνεια $0 \leq x \leq \infty$ (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.4.1), τη συνοριακή συνθήκη (4.4.2α) και την αρχική συνθήκη (4.4.2β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.1)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = hT|_{x=0} \quad (4.4.2\alpha)$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad (4.4.2\beta)$$

Η συνοριακή συνθήκη (4.4.2α) είναι ομογενής, επομένως η θερμοκρασία $T(x, t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$T(x, t) = X(x)S(t) \quad (4.4.3)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (4.4.3) στην Εξ. (4.4.1), και διαχωρίζοντας τους όρους που εξαρτώνται από x και t , προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \quad (4.4.4)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (4.4.5\alpha)$$

$$\frac{dS}{dt} + \alpha \lambda^2 S = 0, \quad (4.4.5\beta)$$

με γενικές λύσεις

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (4.4.6\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.6\beta)$$

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (4.4.6α) τη συνοριακή συνθήκη (4.4.2α), προκύπτει:

$$\begin{aligned} -k \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} = -hX|_{x=0} \Rightarrow -k(-A_1 \lambda \sin \lambda \cdot 0 + A_2 \lambda \cos \lambda \cdot 0) = -h(A_1 \cos \lambda \cdot 0 + \\ + A_2 \sin \lambda \cdot 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -kA_2\lambda = -hA_1 \Rightarrow A_2 = \frac{h}{k\lambda} A_1$$

Με αντικατάσταση του συντελεστή A_2 στην Εξ. (4.4.6α) προκύπτει:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos \lambda x + \frac{h}{k\lambda} A_1 \sin \lambda x = \frac{A_1}{\lambda} \left[\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x \right] \\ \Rightarrow X(x) &= c(\lambda) \left[\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x \right] \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

όπου $c(\lambda) = \frac{A_1}{\lambda}$. Ο συντελεστής $c(\lambda)$ εξαρτάται από όλες τις τιμές του λ στο διάστημα

$0 \leq \lambda \leq \infty$, σε αντίθεση με τα προβλήματα συνοριακών τιμών, στα οποία οι τιμές του λ ήταν διακριτές. Εφόσον έχουν προσδιοριστεί οι μεταβλητές $X(x)$ και $S(t)$, η γενική λύση της Εξ. (4.4.1) λαμβάνεται από την Εξ. (4.4.3), με υπέρθεση των λύσεων, μέσω ολοκλήρωσης ως προς λ από $\lambda = 0$ έως $\lambda = \infty$, ως

$$T(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) e^{-\alpha \lambda^2 t} \left[\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x \right] d\lambda \quad (4.4.8)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η αρχική συνθήκη (4.4.2β) και προκύπτει η Εξ. (4.4.9) ως

$$F(x) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \left[\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x \right] d\lambda, \quad (4.4.9)$$

η οποία είναι ολοκληρωτικό ανάπτυγμα Fourier της $F(x)$. Ο συντελεστής $c(\lambda)$ δίνεται από την Εξ. (4.4.10) ως

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \frac{1}{N(\lambda)} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \left[\lambda \cos \lambda x' + \frac{h}{k} \sin \lambda x' \right] dx' \\ \Rightarrow c(\lambda) &= \frac{1}{\pi \left(\lambda^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right)} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \left[\lambda \cos \lambda x' + \frac{h}{k} \sin \lambda x' \right] dx' \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

όπου $N(\lambda) = \pi \left(\lambda^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right)$ (Bochner & Trust, 1959, Papoulis, 1962, Hahn & Özisik, 2012, Wiener, 1989). Αντικαθιστώντας τον συντελεστή $c(\lambda)$ στην Εξ. (4.4.8), προκύπτει η ζητούμενη θερμοκρασία $T(x, t)$ ως

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi \left(\lambda^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right)} e^{-\alpha \lambda^2 t} \left[\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x \right] \int_{\xi=0}^{\infty} F(x') \left[\lambda \cos \lambda x' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h}{k} \sin \lambda x' \right] dx' \right] d\lambda \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Ημι-άπειρο Χωρίο με Συνοριακή Συνθήκη Dirichlet

Έστω ημι-άπειρο χωρίο με επίπεδη επιφάνεια $0 \leq x \leq \infty$. Για $t = 0$ η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με $T(x, 0) = F(x) = T_0$, ενώ για $t > 0$ η συνοριακή επιφάνεια $x = 0$ βρίσκεται σε θερμοκρασία $T(0, t) = 0$.

Το πρόβλημα περιγράφεται από την μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.4.12), τη συνοριακή συνθήκη (4.4.13α) και την αρχική συνθήκη (4.4.13β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.12)$$

$$T(0, t) = 0 \quad (4.4.13\alpha)$$

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (4.4.13\beta)$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, μέσω του χωρισμού των μεταβλητών, προκύπτουν οι γενικές λύσεις (4.4.6α) και (4.4.6β), οι οποίες γράφονται πάλι ως

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (4.4.14\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.14\beta)$$

Αντικαθιστώντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.13α) στην Εξ. (4.4.14α), προκύπτει ότι:

$$X(x=0) = 0 \Rightarrow A_1 \cos \lambda \cdot 0 + A_2 \sin \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

Επομένως η σχέση (4.4.14α) αναδιατυπώνεται ως

$$X(x) = A_2 \sin \lambda x \quad (4.4.15)$$

Με ολοκλήρωση των λύσεων (4.4.14β), (4.4.15) ως προς λ από $\lambda = 0$ έως $\lambda = \infty$, προκύπτει η θερμοκρασιακή κατανομή $T(x, t)$ ως

$$T(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \sin \lambda x e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.16)$$

όπου $c(\lambda) = A_2 A_3$. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η αρχική συνθήκη (4.4.13β) και προκύπτει η Εξ. (4.4.17) ως

$$F(x) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (4.4.17)$$

η οποία είναι ολοκληρωτικό ανάπτυγμα Fourier της αρχικής κατανομής της θερμοκρασίας $F(x)$. Ο συντελεστής $c(\lambda)$ δίνεται από την Εξ. (4.4.18) ως

$$c(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \sin \lambda x' dx' \quad (4.4.18)$$

όπου $\frac{1}{N(\lambda)} = \frac{2}{\pi}$ (Titchmarsh, 1948).

Αντικαθιστώντας τον συντελεστή $c(\lambda)$ στην γενική λύση (4.4.16), προκύπτει:

$$T(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left(\int_{x'=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} F(x') \sin \lambda x' dx' \right) \sin \lambda x e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.19)$$

Αναδιατάσσοντας τα ολοκληρώματα της Εξ. (4.4.19), προκύπτει η Εξ. (4.4.20) ως

$$\Rightarrow T(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} \sin \lambda x \sin \lambda x' d\lambda dx' \quad (4.4.20)$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $2 \sin \lambda x \sin \lambda y = \cos \lambda(x - y) - \cos \lambda(x + y)$, η Εξ. (4.4.20) γράφεται ως

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} 2 \sin \lambda x \sin \lambda x' d\lambda dx' \\ \Rightarrow T(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} (\cos \lambda(x - x') - \cos \lambda(x + x')) d\lambda dx' \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

με

- $\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} \cos \lambda(x - x') d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}$
- $\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} \cos \lambda(x + x') d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}}$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω ολοκληρώματα στην Εξ. (4.4.21), προκύπτει:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \left[\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} - \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}} \right] dx' \\ \Rightarrow T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}} \right] dx' \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

ή, για σταθερή αρχική θερμοκρασία $F(x') = T_0$,

$$\Rightarrow T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{x'=0}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}} \right] dx' \quad (4.4.23)$$

Θεωρώντας τις νέες μεταβλητές:

- $-\eta = \frac{x-x'}{\sqrt{4\alpha t}} \Rightarrow dx' = \sqrt{4\alpha t} d\eta$
- $\eta = \frac{x+x'}{\sqrt{4\alpha t}} \Rightarrow dx' = \sqrt{4\alpha t} d\eta$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές αυτές στην Εξ. (4.4.23), και ολοκληρώνοντας ως προς η από η έως ∞ προκύπτει:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \left[\int_{-\eta=-\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} \sqrt{4\alpha t} d\eta - \int_{\eta=\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} \sqrt{4\alpha t} d\eta \right] \\ \Rightarrow T(x, t) &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\eta=-\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\eta=\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \right] \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

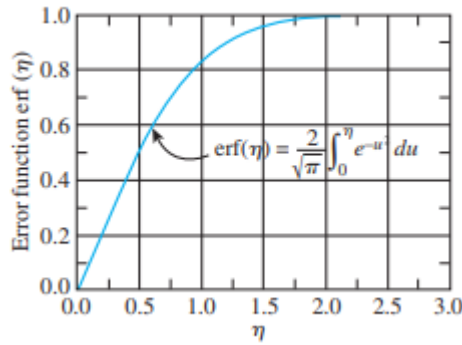
Το $e^{-\eta^2}$ είναι συμμετρικό στο $\eta = 0$, επομένως η Εξ. (4.2.24) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\eta = -\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta - \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right] \\
T(x, t) &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\eta = -\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^0 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta \right] = 2 \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta \\
\Rightarrow \frac{T(x, t)}{T_0} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta
\end{aligned} \tag{4.4.25}$$

με

$$\operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta \tag{4.4.26}$$

η οποία είναι γνωστή ως συνάρτηση σφάλματος. Οι τιμές της συνάρτησης $\operatorname{erf}(\eta)$ κυμαίνονται από 0 έως 1. Στο Σχήμα 4.4.3 παρουσιάζεται η καμπύλη της συνάρτησης σφάλματος για διάφορες τιμές του η . Σημειώνεται πως η συνάρτηση $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$ ονομάζεται συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος (Hahn & Özisik, 2012).



Σχήμα 4.4.3: Διάγραμμα της συνάρτησης σφάλματος $\operatorname{erf}(\eta)$ (Cengel, 2006).

Η Εξ. (4.2.25) με αντικατάσταση της συνάρτησης σφάλματος, γράφεται:

$$T(x, t) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \tag{4.4.27}$$

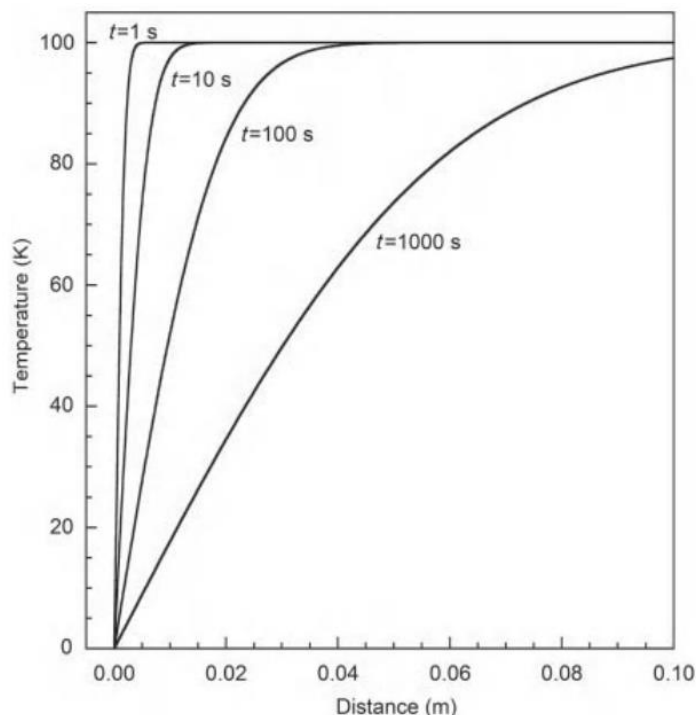
Ορισμένες από τις ιδιότητες της συνάρτησης σφάλματος είναι:

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \tag{4.4.28\alpha}$$

$$\operatorname{erf}(\eta)|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \tag{4.4.28\beta}$$

Από την ιδιότητα (4.4.28α) παρατηρείται πως για $\eta = 0$ (ή $x = 0$), η συνοριακή συνθήκη (4.4.13α) επαληθεύεται. Αντίστοιχα για $\eta \rightarrow \infty$, η Εξ. (4.4.27) γίνεται $T(\infty, t) = T_0$. Αυτό πρακτικά σημαίνει, πως όσο το $x \rightarrow \infty$, η θερμότητα για δεδομένο χρονικό διάστημα t , δεν προλαβαίνει να μεταδοθεί στην άπειρη απόσταση, και για αυτό η

Θερμοκρασία παραμένει ίση με την αρχική. Στο Σχήμα 4.4.4 παρουσιάζεται η θερμοκρασιακή κατανομή $T(x, t)$ για $t = 1 \text{ s}$, $t = 10 \text{ s}$, $t = 100 \text{ s}$ και $t = 1000 \text{ s}$.



Σχήμα 4.4.4: Θερμοκρασιακή κατανομή για διάφορες χρονικές στιγμές t , με αρχική θερμοκρασία $T_i = 100 \text{ K}$ (Hahn & Özisik, 2012).

Από το Σχήμα 4.4.4 και τις καμπύλες της θερμοκρασίας για διάφορα t , φαίνεται πως όσο μικρότερος ο χρόνος, τόσο μεγαλύτερη η μεταβολή της θερμοκρασίας, σε μικρή όμως απόσταση. Αντίθετα, σε μεγαλύτερο χρόνο η θερμότητα μπορεί να μεταδοθεί και σε μεγαλύτερες αποστάσεις. Ωστόσο, παρατηρείται πως με την αύξηση του χρόνου μειώνεται η κλίση της καμπύλης της θερμοκρασίας, δηλαδή η βαθμίδα $\frac{dT}{dx}$, με αποτέλεσμα να μειώνεται και ο ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας. Στην περίπτωση που ο χρόνος ήταν πολύ μικρός, η θερμοκρασία στην επιφάνεια $x = 0$, θα μεταβαλλόταν άμεσα με την επιβολή της συνοριακής συνθήκης, και τότε η κλίση θα θεωρούταν πρακτικά άπειρη.

Ημι-άπειρο Χωρίο με Συνοριακή Συνθήκη Neumann

Έστω ημι-άπειρο χωρίο με επίπεδη επιφάνεια $0 \leq x \leq \infty$. Για $t = 0$ η αρχική θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με $T(x, 0) = F(x)$, ενώ για $t > 0$ η συνοριακή επιφάνεια $x = 0$ διατηρείται μονωμένη. Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.4.29), τη συνοριακή συνθήκη (4.4.30α) και την αρχική συνθήκη (4.4.30β) ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.29)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.4.30\alpha)$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad (4.4.30\beta)$$

Μέσω του χωρισμού των μεταβλητών, προκύπτουν οι γενικές λύσεις (4.4.31α) και (4.4.31β):

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (4.4.31\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.31\beta)$$

Με την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (4.4.30α) προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda \cdot 0 + A_2 \lambda \cos \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

Επομένως η Εξ. (4.4.31α) γράφεται ως

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x \quad (4.4.32)$$

Με ολοκλήρωση των λύσεων (4.4.31β), (4.4.32) ως προς λ , από $\lambda = 0$ έως $\lambda = \infty$, προκύπτει η θερμοκρασιακή κατανομή $T(x, t)$ ως

$$T(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \cos \lambda x e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.33)$$

όπου $c(\lambda) = A_1 A_3$. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η αρχική συνθήκη (4.4.30β) και προκύπτει η Εξ. (4.4.34) ως

$$F(x) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (4.4.34)$$

η οποία είναι ολοκληρωτικό ανάπτυγμα Fourier της αρχικής κατανομής της θερμοκρασίας $F(x)$. Ο συντελεστής $c(\lambda)$ δίνεται από την Εξ. (4.4.35) ως

$$c(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \cos \lambda x' dx' \quad (4.4.35)$$

όπου $\frac{1}{N(\lambda)} = \frac{2}{\pi}$ (Bochner & Trust, 1959, Papoulis, 1962, Hahn & Özisik, 2012, Wiener, 1988).

Αντικαθιστώντας τον συντελεστή $c(\lambda)$ στη γενική λύση (4.4.33), προκύπτει:

$$T(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left(\int_{x'=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} F(x') \cos \lambda x' dx' \right) \cos \lambda x e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.36)$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $2 \cos \lambda x \cos \lambda y = \cos \lambda(x - y) + \cos \lambda(x + y)$ η Εξ. (4.4.20) μπορεί να γραφεί ως

$$T(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} 2 \cos \lambda x \cos \lambda x' d\lambda dx'$$

$$\Rightarrow T(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} (\cos \lambda(x - x') + \cos \lambda(x + x')) d\lambda dx' \quad (4.4.37)$$

με

- $\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} \cos \lambda(x - x') d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}$
- $\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^2 t} \cos \lambda(x + x') d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}}$

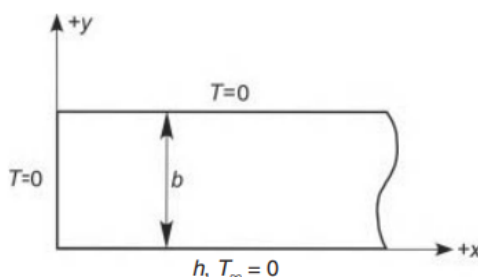
Αντικαθιστώντας τα παραπάνω ολοκληρώματα στην Εξ. (4.4.37), προκύπτει:

$$T(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \left[\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} + \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}} \right] dx'$$

$$\Rightarrow T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{x'=0}^{\infty} F(x') \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}} \right] dx' \quad (4.4.38)$$

Διδιάστατο Πρόβλημα με μία Πεπερασμένη και μία Ημι-άπειρη Επιφάνεια

Ένα ημι-άπειρο χωρίο με ημι-άπειρη επιφάνεια $0 < x \leq \infty$ και μια πεπερασμένη επιφάνεια $0 \leq y \leq b$ όπως στο Σχήμα 4.4.5, βρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία $T(x, y, t = 0) = F(x, y)$. Για $t > 0$, οι συνοριακές επιφάνειες $x = 0$ και $y = b$, βρίσκονται σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ η επιφάνεια $y = 0$, μεταδίδει θερμότητα μέσω συναγωγής σε ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας ($T_{\infty} = 0$).



Σχήμα 4.4.5: Ημι-άπειρο χωρίο με $0 < x \leq \infty$ και $0 \leq y \leq b$ (Hahn & Özisik, 2012).

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.4.39), τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (4.4.40α), (4.4.40β) και τη μη ομογενή αρχική συνθήκη (4.4.40γ).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t > 0 \quad (4.4.39)$$

$$T(x=0) = 0 \quad (4.4.40\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -hT|_{y=0}, \quad T(y=b) = 0 \quad (4.4.40\beta)$$

$$T(x, y, t=0) = F(x, y, z) \quad (4.4.40\delta)$$

Η συνάρτηση $T(x, y, t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$T(x, y, t) = X(x)Y(y)S(t) \quad (4.4.41)$$

και με αντικατάστασή της στην Εξ. (4.4.39) προκύπτει:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (4.4.42)$$

όπου λ^2 η σταθερά διαχωρισμού. Θεωρείται αρχικά η πρώτη ομογενής διαφορική εξίσωση ως προς S η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \lambda^2 \alpha S = 0 \quad (4.4.43)$$

η γενική λύση της οποίας είναι:

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.44)$$

Στη συνέχεια διαχωρίζεται η συνάρτηση $Y(y)$ της Εξ. (4.4.42), και προκύπτει:

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\beta^2 = 0 \quad (4.4.45)$$

η γενική λύση της οποίας είναι:

$$Y(y) = A_2 \cos \beta y + A_3 \sin \beta y \quad (4.4.46)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.40β) για $y = 0$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
-k \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -hY|_{y=0} \Rightarrow -k(-A_2\beta \sin \beta \cdot 0 + A_3\beta \cos \beta \cdot 0) = -hA_2 \cos \beta \cdot 0 + \\
&A_3 \sin \beta \cdot 0 \\
&\Rightarrow -kA_3\beta = -hA_2 \Rightarrow A_2 = \frac{k\beta A_3}{h}
\end{aligned}$$

ενώ για $y = b$:

$$\begin{aligned}
Y(y=b) &= 0 \Rightarrow A_2 \cos \beta b + A_3 \sin \beta b = 0 \\
&\Rightarrow \frac{k\beta A_3}{h} \cos \beta b + A_3 \sin \beta b = 0 \\
&\Rightarrow \beta_n \cot \beta_n b = -\frac{h}{k} \rightarrow \beta_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{4.4.47}$$

Αντικαθιστώντας το $A_3 = \frac{h A_2}{k \beta_n}$ και το $\beta_n = -\frac{h}{k \cot \beta_n b}$ στην Εξ. (4.4.46) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
Y(y) &= A_2 \cos \beta_n y + \frac{h}{k} \frac{A_2}{-\frac{1}{\cot \beta_n b}} \sin \beta_n y \\
&\Rightarrow Y(y) = A_2 \cos \beta_n y + A_2 \cot \beta_n b \sin \beta_n y = A_2 \cos \beta_n y + \frac{A_2 \cos \beta_n b \sin \beta_n y}{\sin \beta_n b} \\
&\Rightarrow Y(y) = A_2 \sin \beta_n (b - y)
\end{aligned} \tag{4.4.48}$$

Λαμβάνοντας και την εξίσωση για την συνάρτηση $X(x)$ της Εξ. (4.4.42) που αφορά την ημι-άπειρη επιφάνεια, προκύπτει:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\gamma^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\gamma^2 = 0 \tag{4.4.49}$$

η γενική λύση της οποίας είναι:

$$X(x) = A_4 \cos \gamma x + A_5 \sin \gamma x \tag{4.4.50}$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.40α), προκύπτει ότι $A_4 = 0$, άρα η γενική λύση $X(x)$ δίνεται από την Εξ. (4.4.51) ως

$$X(x) = A_5 \sin \gamma x \tag{4.4.51}$$

Ισχύει ότι $\lambda^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Λόγω των συνοριακών συνθηκών και στις δύο συνοριακές επιφάνειες της διεύθυνσης y , οι ιδιοτιμές β_n περιορίζονται σε διακριτές τιμές που προκύπτουν από την Εξ. (4.4.47). Αντίθετα, οι ιδιοτιμές γ λαμβάνουν όλες τις πιθανές από 0 έως ∞ . Επομένως η ζητούμενη λύση $T(x, y, t)$ προκύπτει μετά από ολοκλήρωση των λύσεων ως προς γ , από $\gamma = 0$ έως ∞ , και από την άθροιση των τιμών β_n , ως εξής:

$$T(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} A_1 e^{-\alpha(\beta_n^2 + \gamma^2)t} A_2 \sin \beta_n (b - y) A_5 \sin \gamma x d\gamma$$

$$\Rightarrow T(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} c_n(\gamma) e^{-\alpha(\beta_n^2 + \gamma^2)t} \sin \beta_n(b - y) \sin \gamma x d\gamma \quad (4.4.52)$$

όπου $c_n(\gamma) = A_1 A_2 A_5$. Εισάγοντας την αρχική συνθήκη (4.4.40δ), προκύπτει:

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} c_n(\gamma) \sin \beta_n(b - y) \sin \gamma x d\gamma \quad (4.4.53)$$

Για την εύρεση του συντελεστή $c_n(\gamma)$ γίνεται αρχικά χρήση της ιδιότητας την ορθογωνιότητας του $\sin \beta_n(b - y)$, και εφαρμόζεται και στα δύο μέλη της Εξ. (4.4.53) το ολοκλήρωμα $\int_{y=0}^b \sin \beta_j(b - y) dy$, ως εξής:

$$\int_{y=0}^b F(x, y) \sin \beta_j(b - y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} \int_{y=0}^b \sin \beta_j(b - y) c_n(\gamma) \sin \beta_n(b - y) \sin \gamma x dy d\gamma$$

και για $j = n$:

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^b F(x, y) \sin \beta_n(b - y) dy &= \int_{\gamma=0}^{\infty} c_n(\gamma) \sin \gamma x d\gamma \\ \Rightarrow f(x) &= \int_{\gamma=0}^{\infty} c_n(\gamma) \sin \gamma x d\gamma \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

όπου

$$f(x) = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_{y'=0}^b F(x, y') \sin \beta_n(b - y') dy' \quad (4.4.55)$$

με $N(\beta_n) = \int_{y=0}^b \sin^2 \beta_n(b - y) dy = \frac{b(\beta_n^2 + H^2) + H}{2(\beta_n^2 + H^2)}$, όπου $H = \frac{h}{k}$ (Hahn & Özisik, 2012).

Η Εξ. (4.4.54) είναι το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Ο συντελεστής $c_n(\gamma)$ δίνεται ως

$$c_n(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} f(x') \sin \gamma x' dx' \quad (4.4.56)$$

$$\Rightarrow c_n(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} \sin \gamma x' \left[\frac{1}{N(\beta_n)} \int_{y'=0}^b F(x', y') \sin \beta_n(b - y') dy' \right] dx' \quad (4.4.57)$$

(Titchmarsh, 1948).

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.57) στη γενική λύση (4.4.52), προκύπτει:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_{x'=0}^{\infty} \sin \gamma x' \left[\frac{1}{N(\beta_n)} \int_{y'=0}^b F(x', y') \sin \beta_n(b - \right. \\ &\quad \left. y') dy' \right] dx' e^{-\alpha(\beta_n^2 + \gamma^2)t} \sin \beta_n(b - y) \sin \gamma x d\gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{N(\beta_n)} \sin \beta_n (b - y) e^{-\alpha \beta_n^2 t} \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^b F(x', y') \sin \beta_n (b - y') \left(\int_{\gamma=0}^{\infty} e^{-\alpha \gamma^2 t} \sin \gamma x \sin \gamma x' d\gamma \right) dy' dx' \right] \quad (4.4.58)$$

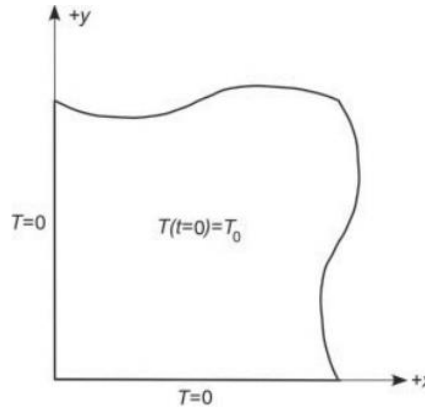
Το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma=0}^{\infty} e^{-\alpha \gamma^2 t} \sin \gamma x \sin \gamma x' d\gamma$ έχει ήδη προσδιοριστεί και δίνεται ως

$$\int_{\gamma=0}^{\infty} e^{-\alpha \gamma^2 t} \sin \gamma x \sin \gamma x' d\gamma = e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}} \quad (4.4.59)$$

Χωρίο με Ημι-άπειρη Γωνία

Έστω στερεό με μια γωνία η οποία προκύπτει από δύο ημι-άπειρες επιφάνειες

$0 \leq x \leq \infty$ και $0 \leq y \leq \infty$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4.6. Το χωρίο βρίσκεται αρχικά σε θερμοκρασία T_0 , ενώ για $t > 0$ οι συνοριακές επιφάνειες $x = 0$ και $y = 0$ διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία.



Σχήμα 4.4.6: Ημι-άπειρη γωνία (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Εξ. (4.4.60), τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (4.4.61α) και (4.4.61β) και την αρχική συνθήκη (4.4.61γ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.60)$$

$$T(x = 0) = 0 \quad (4.4.61\alpha)$$

$$T(y = 0) = 0 \quad (4.4.61\beta)$$

$$T(x, y, t = 0) = T_0 \quad (4.4.61\gamma)$$

Η λύση $T(x, y, t)$ του προβλήματος μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο λύσεων, T_1 , η οποία είναι λύση του μονοδιάστατου προβλήματος με ημι-άπειρη επιφάνεια $0 < x < \infty$ και

αρχική συνθήκη $T(x, t = 0) = 1$, και T_2 , η οποία αποτελεί τη λύση του μονοδιάστατου προβλήματος με ημι-άπειρη επιφάνεια $0 < y < \infty$ και αρχική συνθήκη $T(y, t = 0) = T_0$. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εξισώσεις και οι συνθήκες που περιγράφουν το κάθε πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.62)$$

$$T_1(x = 0) = 0 \quad (4.4.63\alpha)$$

$$T_1(x, t = 0) = 1 \quad (4.4.63\beta)$$

και

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad 0 < y < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.64)$$

$$T_2(y = 0) = 0 \quad (4.4.65\alpha)$$

$$T_2(y, t = 0) = T_0 \quad (4.4.65\beta)$$

Και τα δύο προβλήματα είναι σχεδόν πανομοιότυπα, καθώς η μόνη διαφορά τους είναι η τιμή της αρχικής συνθήκης. Η γενική λύση του κάθε προβλήματος έχει προσδιοριστεί και δίνεται από την Εξ. (4.4.27) ως

$$T_1(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (4.4.66)$$

και

$$T_2(x, t) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (4.4.67)$$

Η γενική λύση $T(x, y, t)$ προκύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.4.66) και (4.4.67) ως

$$T(x, y, t) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (4.4.68)$$

4.4.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Ημι-άπειρος Στερεός Κύλινδρος

Έστω κύλινδρος με ημι-άπειρη κυλινδρική επιφάνεια $0 \leq r < \infty$, και αρχική θερμοκρασία $T(r, t = 0) = F(r)$.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.69)$$

$$T(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.4.70\alpha)$$

$$T(r, t = 0) = F(r) \quad (4.4.70\beta)$$

Εφόσον η συνοριακή συνθήκη (4.4.70α) θεωρείται ομογενής, η συνάρτηση $T(r, t)$ μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ως

$$T(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.4.71)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.71) στην αρχική εξίσωση (4.4.69), και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.4.72)$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.4.73)$$

η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.4.74) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.74)$$

Διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $R(r)$ της Εξ. (4.4.72) προκύπτει η Εξ. (4.4.75) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.4.75)$$

η οποία είναι εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ (βλέπε Παράρτημα Β). Η λύση της Εξ. (4.4.75) δίνεται ως

$$R(r) = A_2 J_0(\lambda r) + A_3 Y_0(\lambda r) \quad (4.4.76)$$

όπου J_0 και Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.71α) ο όρος $A_3 Y_0(\lambda r)$ απαλείφεται καθώς $Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Άρα θα πρέπει ο συντελεστής A_3 να ισούται με μηδέν.

Η Εξ. (4.4.76) γράφεται ως

$$R(r) = A_2 J_0(\lambda r) \quad (4.4.77)$$

Η γενική λύση προκύπτει από την ολοκλήρωση των λύσεων (4.4.74) και (4.4.77), ως προς λ , στο διάστημα $0 < \lambda < \infty$, ως εξής:

$$T(r, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.78)$$

όπου $c(\lambda) = A_1 A_2$. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (4.4.70β), προκύπτει:

$$F(r) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.4.79)$$

η οποία είναι η έκφραση της αρχικής θερμοκρασίας $F(r)$ σε ολοκλήρωμα Fourier-Bessel. Ο συντελεστής $c(\lambda)$ δίνεται από την Εξ. (4.4.80) ως

$$c(\lambda) = \lambda \int_{r'=0}^{\infty} r' J_0(\lambda r') F(r') dr' \quad (4.4.80)$$

(Hahn & Özisik, 2012, Poularikas, 1999).

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.80) στην (4.4.78), προκύπτει:

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \lambda \int_{r'=0}^{\infty} r' J_0(\lambda r') F(r') dr' J_0(\lambda r) e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \\ \Rightarrow T(r, t) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} [\lambda J_0(\lambda r) e^{-\alpha \lambda^2 t} \int_{r'=0}^{\infty} r' J_0(\lambda r') F(r') dr'] d\lambda \end{aligned} \quad (4.4.81)$$

Ισχύει ότι:

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) J_0(\lambda r') e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2\alpha t} e^{-\left(\frac{r^2+r'^2}{4\alpha t}\right)} I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) \quad (4.4.82)$$

(Hahn & Özisik, 2012).

Επομένως η Εξ. (4.4.81) γράφεται ως

$$T(r, t) = \frac{1}{2\alpha t} \int_{r'=0}^{\infty} r' e^{-\left(\frac{r^2+r'^2}{4\alpha t}\right)} I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) F(r') dr' \quad (4.4.83)$$

Στην ειδική περίπτωση που η αρχική θερμοκρασία δίνεται ως

$$\begin{aligned} F(r) &= T_0, \text{ σταθερό για } 0 < r < b \\ F(r) &= 0, \quad \text{για } r > b \end{aligned}$$

(4.4.84)

η γενική λύση (4.4.83) προκύπτει:

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \frac{1}{2\alpha t} \int_{r'=0}^b r' e^{-\left(\frac{r^2+r'^2}{4\alpha t}\right)} I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) T_0 dr' + \frac{1}{2\alpha t} \int_{r'=0}^{\infty} r' e^{-\left(\frac{r^2+r'^2}{4\alpha t}\right)} I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) \cdot 0 dr' \\ \Rightarrow T(r, t) &= \frac{T_0}{2\alpha t} e^{-\left(\frac{r^2}{4\alpha t}\right)} \int_{r'=0}^{\infty} r' e^{-\left(\frac{r'^2}{4\alpha t}\right)} I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) dr' \end{aligned} \quad (4.4.85)$$

Ημι-άπειρος Κοίλος Κύλινδρος

Έστω κοίλος κύλινδρος με ημι-άπειρη κυλινδρική επιφάνεια $\alpha \leq r < \infty$, και αρχική θερμοκρασία $T(r, t = 0) = F(r)$. Για $t > 0$, η συνοριακή επιφάνεια $r = \alpha$ μεταδίδει θερμότητα μέσω συναγωγής προς ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας ($T_{\infty} = 0$).

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \alpha \leq r < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.86)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\alpha} = hT|_{r=\alpha} \quad (4.4.87\alpha)$$

$$T(r, t = 0) = F(r) \quad (4.4.87\beta)$$

Εφόσον η συνοριακή συνθήκη (4.4.87α) είναι ομογενής, η συνάρτηση $T(r, t)$ μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ως

$$T(r, t) = R(r)S(t) \quad (4.4.88)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.88) στην αρχική εξίσωση (4.4.86), και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.4.89)$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.4.90)$$

η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.4.91) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.91)$$

Διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $R(r)$ της Εξ. (4.4.89) προκύπτει η Εξ. (4.4.92) ως

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.4.92)$$

η οποία είναι η εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ (βλέπε Παράρτημα β) Η λύση της Εξ. (4.4.92) δίνεται από τη Εξ. (4.4.93) ως

$$R(r) = A_2 J_0(\lambda r) + A_3 Y_0(\lambda r) \quad (4.4.93)$$

όπου J_0 και Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη (4.4.87α), προκύπτει:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial R}{\partial r} \Big|_{r=a} &= h R|_{r=a} \\ \Rightarrow A_2 \frac{d}{dr} [J_0(\lambda a)] + A_3 \frac{d}{dr} [Y_0(\lambda a)] &= H [A_2 J_0(\lambda a) + A_3 Y_0(\lambda a)] \\ \Rightarrow -A_2 \lambda J_1(\lambda a) - A_3 \lambda Y_1(\lambda a) &= A_2 J_0(\lambda a) H + A_3 Y_0(\lambda a) H \\ \Rightarrow A_3 Y_0(\lambda a) H + A_3 \lambda Y_1(\lambda a) &= -A_2 \lambda J_1(\lambda a) - A_2 J_0(\lambda a) H \\ \Rightarrow A_3 [Y_0(\lambda a) H + \lambda Y_1(\lambda a)] &= -A_2 [\lambda J_1(\lambda a) + A_2 J_0(\lambda a) H] \\ \Rightarrow A_3 &= -A_2 \frac{[\lambda J_1(\lambda a) + J_0(\lambda a) H]}{[Y_0(\lambda a) H + \lambda Y_1(\lambda a)]} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τον συντελεστή A_3 στην Εξ. (4.4.93) η συνάρτηση $R(r)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} R(r) &= A_2 J_0(\lambda r) - A_2 \frac{[\lambda J_1(\lambda a) + J_0(\lambda a) H]}{[Y_0(\lambda a) H + \lambda Y_1(\lambda a)]} Y_0(\lambda r) \\ \Rightarrow R(r) &= A_4 \{ J_0(\lambda r) [Y_0(\lambda a) H + \lambda Y_1(\lambda a)] - Y_0(\lambda r) [\lambda J_1(\lambda a) + J_0(\lambda a) H] \} \quad (4.4.94) \end{aligned}$$

όπου $H = \frac{h}{k}$ και $A_4 = \frac{A_2}{[Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)]}$. Η λύση $T(r, t)$ προκύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.4.91) και (4.4.94), και την ολοκλήρωσή τους ως προς λ , από $\lambda = 0$ έως $\lambda = \infty$, ως εξής:

$$T(r, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) R(r, \lambda) e^{-\alpha\lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.95)$$

όπου $c(\lambda) = A_1 A_4$. Εφαρμόζεται η αρχική συνθήκη (4.4.87β), και προκύπτει:

$$F(r) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) R(r, \lambda) d\lambda \quad (4.4.96)$$

η οποία είναι η έκφραση της αρχικής θερμοκρασίας $F(r)$ σε ολοκλήρωμα Fourier-Bessel. Ο συντελεστής $c(\lambda)$ υπολογίζεται ως

$$c(\lambda) = \frac{1}{N(\lambda)} \lambda \int_{r'=\alpha}^{\infty} r' R(r', \lambda) F(r') dr' \quad (4.4.97)$$

με τη νόρμα $N(\lambda)$ να δίνεται από την Εξ. (4.4.98) ως

$$N(\lambda) = [\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]^2 + [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)]^2 \quad (4.4.98)$$

(Hahn & Özisik, 2012).

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.4.97) και (4.4.98) στην (4.4.95), προκύπτει:

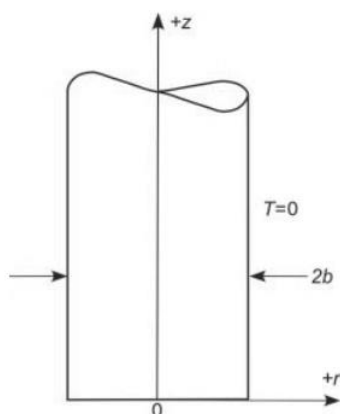
$$T(r, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{[\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]^2 + [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)]^2} \lambda \int_{r'=\alpha}^{\infty} r' \{J_0(\lambda r') [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)] - Y_0(\lambda r') [\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]\} F(r') \{J_0(\lambda r) [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)] - Y_0(\lambda r) [\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]\} e^{-\alpha\lambda^2 t} d\lambda dr'$$

$$\Rightarrow T(r, t) =$$

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\{J_0(\lambda r) [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)] - Y_0(\lambda r) [\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]\} e^{-\alpha\lambda^2 t}}{[\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]^2 + [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)]^2} \lambda \left(\int_{r'=\alpha}^{\infty} r' \{J_0(\lambda r') [Y_0(\lambda\alpha)H + \lambda Y_1(\lambda\alpha)] - Y_0(\lambda r') [\lambda J_1(\lambda\alpha) + J_0(\lambda\alpha)H]\} F(r') dr' \right) d\lambda \quad (4.4.99)$$

Διδιάστατη Μετάδοση Θερμότητας σε Ημι-άπειρο Στερεό Κύλινδρο

Έστω κύλινδρος με ημι-άπειρη κυλινδρική επιφάνεια $0 \leq z < \infty$ και $0 \leq r \leq b$, και αρχική θερμοκρασία $T(t=0) = F(r, z)$. Για $t > 0$ οι συνοριακές επιφάνειες $r = b$ και $z = 0$, διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4.7.



Σχήμα 4.4.7: Ημι-άπειρος στερεός κύλινδρος (Hahn & Özisik, 2012).

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq b, \quad 0 \leq z < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.100)$$

$$T(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.4.101\alpha)$$

$$T(r = b) = 0 \quad (4.4.101\beta)$$

$$T(z = 0) = 0 \quad (4.4.101\gamma)$$

$$T(t = 0) = F(r, z) \quad (4.4.101\delta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (4.4.101α), (4.4.101β) και (4.4.101γ) θεωρούνται ομογενείς, επομένως η συνάρτηση $T(r, z, t)$ μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ως

$$T(r, z, t) = R(r)Z(z)S(t) \quad (4.4.102)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.102) στην αρχική εξίσωση (4.4.100), και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.4.103)$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.4.104)$$

η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.4.105) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.105)$$

Η Εξ. (4.4.103) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$ γίνεται:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \lambda^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \eta^2 \quad (4.4.106)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \eta^2 Z = 0 \quad (4.4.107)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.4.107) δίνεται από την Εξ. (4.4.108) ως

$$Z(z) = A_2 \cos \eta z + A_3 \sin \eta z \quad (4.4.108)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.101γ), προκύπτει:

$$Z(z) = 0 \Rightarrow A_2 \cos \eta \cdot 0 + A_3 \sin \eta \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

Επομένως η Εξ. (4.4.108) γράφεται ως

$$Z(z) = A_3 \sin \eta z \quad (4.4.109)$$

όπου $A_3 = A_3(\eta)$.

Τέλος, η Εξ. (4.4.103) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\lambda^2 - \eta^2)R = 0 \quad (4.4.110)$$

η οποία είναι εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, με γενική λύση την Εξ. (4.4.111):

$$R(r) = A_4 J_0(\beta r) + A_5 Y_0(\beta r) \quad (4.4.111)$$

όπου $\beta^2 = \lambda^2 - \eta^2$ και J_0, Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη (4.4.101α), προκύπτει ότι $A_5 = 0$, καθώς

$Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως, η Εξ. (4.4.111) απλουστεύεται ως

$$R(r) = A_4 J_0(\beta r) \quad (4.4.112)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται και η συνθήκη (4.4.101β), από την οποία προκύπτει:

$$R(r = b) = 0 \Rightarrow A_4 J_0(\beta b) = 0 \Rightarrow J_0(\beta b) = 0, \quad \beta_n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4.113)$$

Η γενική λύση ανακύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.4.105), (4.4.109) και (4.4.112), την άθροισή των ιδιοτιμών β_n από $n = 1$ έως ∞ , και την ολοκλήρωση ως προς η , από $\eta = 0$ έως ∞ , ως εξής:

$$T(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) J_0(\beta_n r) \sin \eta z e^{-\alpha(\beta_n^2 + \eta^2)t} d\eta \quad (4.4.114)$$

όπου $c_n(\eta) = A_1 A_3 A_4$. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (4.4.101δ), προκύπτει:

$$F(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) J_0(\beta_n r) \sin \eta z d\eta \quad (4.4.115)$$

η οποία είναι το ανάπτυγμα της αρχικής θερμοκρασίας $F(r, z)$, σε σειρά Fourier. Για την εύρεση του συντελεστή $c_n(\eta)$, γίνεται αρχικά χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $J_0(\beta r)$, εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της Εξ. (4.4.115) το ολοκλήρωμα $\int_{r=0}^b r J_0(\beta_p r) dr$, ως εξής:

$$\int_{r=0}^b r F(r, z) J_0(\beta_p r) dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\infty} \int_{r=0}^b r J_0(\beta_p r) c_n(\eta) J_0(\beta_n r) \sin \eta z dr d\eta,$$

και για $p = n$:

$$\int_{r=0}^b r F(r, z) J_0(\beta_n r) dr = \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) \sin \eta z d\eta$$

$$\Rightarrow f(z) = \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) \sin \eta z d\eta, \quad 0 \leq z < \infty \quad (4.4.116)$$

με

$$f(z) = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_{r=0}^b r F(r, z) J_0(\beta_n r) dr \quad (4.4.117)$$

όπου

$$N(\beta_n) = \int_{r=0}^b r J_0^2(\beta_n r) dr = \frac{b^2 J_1^2(\beta_n b)}{2}, \quad (4.4.118)$$

και

$$c_n(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_{z'=0}^{\infty} f(z') \sin \eta z' dz' \quad (4.4.119)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.4.117), (4.4.118) και (4.4.119) στην Εξ. (4.4.114), προκύπτει:

$$T(r, z, t) = \frac{4}{\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_0(\beta_n r)}{J_1^2(\beta_n b)} e^{-\alpha \beta_n^2 t} \int_{r'=0}^b \int_{z'=0}^{\infty} [r' F(r', z') J_0(\beta_n r')] \times \right.$$

$$\times \left. \int_{\eta=0}^{\infty} e^{-\alpha \eta^2 t} \sin \eta z \sin \eta z' d\eta \right] dz' dr' \Big\} \quad (4.4.120)$$

με

$$\frac{2}{\pi} \int_{\eta=0}^{\infty} e^{-\alpha \eta^2 t} \sin \eta z \sin \eta z' d\eta = \frac{1}{\sqrt{4\pi \alpha t}} \left\{ e^{-\frac{(z-z')^2}{4\alpha t}} - e^{-\frac{(z+z')^2}{4\alpha t}} \right\}$$

Διδιάστατη Μετάδοση Θερμότητας σε Ημι-άπειρο Στερεό Κύλινδρο

Έστω κύλινδρος με ημι-άπειρη κυλινδρική επιφάνεια $0 \leq z < \infty$ και $0 \leq r \leq b$, και αρχική θερμοκρασία $T(t = 0) = F(r, z)$. Για $t > 0$ η συνοριακή επιφάνεια $r = b$ διαχύει θερμότητα μέσω συναγωγής σε ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας ($T_{\infty} = 0$) ενώ η επιφάνεια $z = 0$ είναι μονωμένη.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r \leq b, \quad 0 \leq z < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.121)$$

$$T(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.4.122\alpha)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = hT|_{r=b} \quad (4.4.122\beta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.4.122\gamma)$$

$$T(t = 0) = F(r, z) \quad (4.4.122\delta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (4.4.122α), (4.4.122β) και (4.4.122γ) θεωρούνται ομογενείς, επομένως η συνάρτηση $T(r, z, t)$ μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ως

$$T(r, z, t) = R(r)Z(z)S(t) \quad (4.4.123)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.123) στην αρχική εξίσωση (4.4.121), και διαχωρίζοντας τη συνάρτηση $S(t)$, προκύπτει:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{d^2 S}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (4.4.124)$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \alpha S \lambda^2 = 0 \quad (4.4.125)$$

η γενική λύση της οποίας δίνεται από την Εξ. (4.4.125) ως

$$S(t) = A_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.126)$$

Η Εξ. (4.4.126) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $Z(z)$ γίνεται:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \lambda^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \eta^2 \quad (4.4.127)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \eta^2 Z = 0 \quad (4.4.128)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.4.128) δίνεται από την Εξ. (4.4.129) ως

$$Z(z) = A_2 \cos \eta z + A_3 \sin \eta z \quad (4.4.129)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.122γ), προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial Z(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow -A_2 \eta \sin \eta \cdot 0 + A_3 \eta \cos \eta \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_3 = 0$$

Επομένως η Εξ. (4.4.129) γράφεται ως

$$Z(z) = A_2 \cos \eta z \quad (4.4.130)$$

όπου $A_3 = A_3(\eta)$.

Τέλος, η Εξ. (4.2.124) μετά από τον διαχωρισμό της συνάρτησης $R(r)$, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\lambda^2 - \eta^2) R = 0 \quad (4.4.131)$$

η οποία είναι εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, με γενική λύση την Εξ. (4.4.132):

$$R(r) = A_4 J_0(\beta r) + A_5 Y_0(\beta r) \quad (4.4.132)$$

όπου $\beta^2 = \lambda^2 - \eta^2$ και J_0, Y_0 οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.4.122α), προκύπτει ότι $A_5 = 0$, καθώς

$Y_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$. Επομένως, η Εξ. (4.4.132) απλουστεύεται ως

$$R(r) = A_4 J_0(\beta r) \quad (4.4.133)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται και η συνθήκη (4.4.122β), από την οποία προκύπτει:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial R}{\partial r} \Big|_{r=b} &= hR|_{r=b} \\ -k\beta A_4 J_1(\beta b) &= hA_4 J_0(\beta b) \\ \Rightarrow \beta_n &= -H \frac{J_0(\beta_n b)}{J_1(\beta_n b)} \quad \text{για } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.4.134)$$

Η γενική λύση ανακύπτει από το γινόμενο των Εξ. (4.4.126), (4.4.130) και (4.4.133), την άθροισή των ιδιοτιμών β_n από $n = 1$ έως ∞ , και την ολοκλήρωση ως προς η , από $\eta = 0$ έως ∞ , ως εξής:

$$T(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) J_0(\beta_n r) \cos \eta z e^{-\alpha(\beta_n^2 + \eta^2)t} d\eta \quad (4.4.135)$$

όπου $c_n(\eta) = A_1 A_2 A_4$. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (4.4.122δ), προκύπτει:

$$F(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) J_0(\beta_n r) \sin \eta z d\eta \quad (4.4.136)$$

η οποία είναι το ανάπτυγμα της αρχικής θερμοκρασίας $F(r, z)$, σε σειρά Fourier. Για την εύρεση του συντελεστή $c_n(\eta)$, γίνεται αρχικά χρήση της ιδιότητας της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $J_0(\beta r)$, εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της Εξ. (4.4.136) το ολοκλήρωμα $\int_{r=0}^b r J_0(\beta_p r) dr$, ως εξής:

$$\int_{r=0}^b r F(r, z) J_0(\beta_p r) dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta=0}^{\infty} \int_{r=0}^b r J_0(\beta_p r) c_n(\eta) J_0(\beta_n r) \cos \eta z dr d\eta,$$

και για $p = n$:

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^b r F(r, z) J_0(\beta_n r) dr &= \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) \cos \eta z d\eta \\ \Rightarrow f(z) &= \int_{\eta=0}^{\infty} c_n(\eta) \cos \eta z d\eta, \quad 0 \leq z < \infty \end{aligned} \quad (4.4.137)$$

με

$$f(z) = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_{r=0}^b r F(r, z) J_0(\beta_n r) dr \quad (4.4.138)$$

όπου

$$N(\beta_n) = \int_{r=0}^b r J_0^2(\beta r) dr = \frac{b^2 J_1^2(\beta b)}{2}, \quad (4.4.139)$$

και

$$c_n(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_{z'=0}^{\infty} f(z') \cos \eta z' dz' \quad (4.4.140)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.4.138), (4.4.139) και (4.4.140) στην Εξ. (4.4.135), προκύπτει:

$$T(r, z, t) = \frac{4}{\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_0(\beta_n r)}{J_1^2(\beta_n b)} e^{-\alpha \beta_n^2 t} \int_{r'=0}^b \int_{z'=0}^{\infty} [r' F(r', z') J_0(\beta_n r')] \times \right. \\ \left. \times \int_{\eta=0}^{\infty} e^{-\alpha \eta^2 t} \cos \eta z \cos \eta z' d\eta \right] dz' dr' \} \quad (4.4.142)$$

4.4.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Ημι-άπειρη Στερεά Σφαίρα

Έστω ημι-άπειρη σφαιρική επιφάνεια $0 \leq r < \infty$ με αρχική θερμοκρασία $T(t = 0) = F(r)$.

Το πρόβλημα περιγράφεται ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.143)$$

$$T(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{πεπερασμένη} \quad (4.4.144\alpha)$$

$$T(t = 0) = F(r) \quad (4.4.144\beta)$$

Εισάγοντας τη νέα μεταβλητή $U(r, t) = rT(r, t)$ προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4.4.145)$$

$$U(r = 0) = 0 \quad (4.4.146\alpha)$$

$$U(t = 0) = rF(r) \quad (4.4.146\beta)$$

οι οποίες έχουν υπολογιστεί στην ενότητα 4.2.3. Το παραπάνω πρόβλημα είναι της ίδιας μορφής με το πρόβλημα της μονοδιάστατης μετάδοσης θερμότητας στις καρτεσιανές συντεταγμένες με συνοριακή συνθήκη Dirichlet, το οποίο έχει ήδη επιλυθεί στην ενότητα 4.4.1, και η γενική λύση η οποία έχει προκύψει από την Εξ. (4.4.16) είναι:

$$U(r, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \sin \lambda r e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.147)$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (4.4.146β), προκύπτει:

$$rF(r) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \sin \lambda r d\lambda \quad (4.4.148)$$

που είναι η έκφραση της αρχικής συνθήκης σε ολοκλήρωμα Fourier και όρους ημιτόνου, ενώ ο συντελεστής $c(\lambda)$ δίνεται από την Εξ. (4.4.149) ως

$$c(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} r' F(r') \sin \lambda r' dr' \quad (4.4.149)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.4.149) στην Εξ. (4.4.147), προκύπτει:

$$U(r, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} r' F(r') \sin \lambda r' dr' \sin \lambda r e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \\ \Rightarrow U(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[\sin \lambda r e^{-\alpha \lambda^2 t} \int_{r'=0}^{\infty} r' F(r') \sin \lambda r' dr' \right] d\lambda \quad (4.4.150)$$

Τελικά, η ζητούμενη συνάρτηση $T(r, t)$ ανακύπτει ως

$$T(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[\frac{\sin \lambda r}{r} e^{-\alpha \lambda^2 t} \int_{r'=0}^{\infty} r' F(r') \sin \lambda r' dr' \right] d\lambda \quad (4.4.151)$$

Ημι-άπειρη Κοίλη Σφαίρα

Έστω κοίλη σφαίρα με ημι-άπειρη επιφάνεια $b \leq r < \infty$, η οποία έχει αρχική θερμοκρασία $T(t=0) = F(r)$. Για $t > 0$ η συνοριακή επιφάνεια $r = b$ μεταδίδει θερμότητα μέσω συναγωγής προς ρευστό μηδενικής θερμοκρασίας ($T_{\infty} = 0$).

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad b \leq r < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.152)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = hT|_{r=b} \quad (4.4.153\alpha)$$

$$T(r, t=0) = F(r) \quad (4.4.153\beta)$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, έτσι και τώρα θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός $U(r, t) = rT(r, t)$ από τον οποίο προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4.4.154)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=b} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{b} \right) U|_{r=b} = 0 \quad (4.4.155\alpha)$$

$$U(t=0) = rF(r) \quad (4.4.155\beta)$$

Εισάγεται μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή $x = r - b$, και με αντικατάστασή της στις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ένα νέο πρόβλημα με εξαρτημένη μεταβλητή την $U = U(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.4.156)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} + \left(H - \frac{1}{b} \right) U|_{x=0} = 0 \quad (4.4.157\alpha)$$

$$U(t=0) = (x+b)F(x+b) \quad (4.4.157\beta)$$

όπου $H = \frac{h}{k}$. Η συνοριακή συνθήκη (4.4.157α) είναι ομογενής, επομένως η θερμοκρασία $U(x, t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$U(x, t) = X(x)S(t) \quad (4.4.158)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (4.4.158) στην Εξ. (4.4.156), και διαχωρίζοντας τις συναρτήσεις $X(x)$ και $S(t)$ προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha S} \frac{dS}{dt} = -\lambda^2 \quad (4.4.159)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (4.4.160\alpha)$$

$$\frac{dS}{dt} + \alpha \lambda^2 S = 0, \quad (4.4.160\beta)$$

με γενικές λύσεις

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad (4.4.161\alpha)$$

$$S(t) = A_3 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (4.4.161\beta)$$

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (4.4.161α) τη συνοριακή συνθήκη (4.4.157α), προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} + \left(H - \frac{1}{b} \right) X|_{x=0} = 0 \Rightarrow -A_1 \lambda \sin \lambda \cdot 0 + A_2 \lambda \cos \lambda \cdot 0 = \left(H - \frac{1}{b} \right) (A_1 \cos \lambda \cdot 0 + A_2 \sin \lambda \cdot 0)$$

$$\Rightarrow A_2 \lambda = \left(H - \frac{1}{b} \right) A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{\left(H - \frac{1}{b} \right) A_1}{\lambda}$$

Αντικαθιστώντας το A_2 στην Εξ. (4.4.161α), η συνάρτηση $X(x)$ γράφεται ως

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + \frac{\left(H - \frac{1}{b} \right) A_1}{\lambda} \sin \lambda x = A_1 \left[\cos \lambda x + \frac{\left(H - \frac{1}{b} \right)}{\lambda} \sin \lambda x \right] \quad (4.4.162)$$

Η γενική λύση $U(x, t)$, μετά από το γινόμενο των Εξ. (4.4.161β) και (4.4.162) και την ολοκλήρωσή τους ως προς λ στο διάστημα $0 \leq \lambda < \infty$, προκύπτει ως

$$U(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \left[\cos \lambda x + \frac{\left(H - \frac{1}{b} \right)}{\lambda} \sin \lambda x \right] e^{-\alpha \lambda^2 t} d\lambda \quad (4.4.163)$$

Εφαρμόζοντας και την αρχική συνθήκη (4.4.157β), προκύπτει:

$$(x + b)F(x + b) = \int_{\lambda=0}^{\infty} c(\lambda) \left[\cos \lambda x + \frac{\left(H - \frac{1}{b} \right)}{\lambda} \sin \lambda x \right] d\lambda \quad (4.4.164)$$

όπου ο συντελεστής $c(\lambda)$ με βάση τη θεωρία των ολοκληρωμάτων Fourier (Bochner & Trust, 1959, Papoulis, 1962, Wiener, 1989) γράφεται ως

$$c(\lambda) = \frac{1}{N(\lambda)} \int_{x'=0}^{\infty} (x' + b)F(x' + b) \left[\cos \lambda x' + \frac{\left(H - \frac{1}{b} \right)}{\lambda} \sin \lambda x' \right] dx' \quad (4.4.165)$$

όπου

$$\frac{1}{N(\lambda)} = \frac{2}{\pi \left[1 + \left[\frac{\left(H - \frac{1}{b} \right)}{\lambda} \right]^2 \right]} \quad (4.4.166)$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (4.4.165) και (4.4.166), η λύση $U(x, t)$ προκύπτει ως

$$U(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi \left[1 + \left[\frac{(H-\frac{1}{b})}{\lambda} \right]^2 \right]} \left(\cos \lambda x + \frac{(H-\frac{1}{b})}{\lambda} \sin \lambda x \right) e^{-\alpha \lambda^2 t} \int_{x'=0}^{\infty} (x' + b) F(x' + b) \right. \\ \left. + b) \left(\cos \lambda x' + \frac{(H-\frac{1}{b})}{\lambda} \sin \lambda x' \right) dx' \right\} d\lambda \quad (4.4.167)$$

Επιστρέφοντας στη γενική λύση $T(r, t)$ των αντικαταστάσεων $T(r, t) = \frac{U(r, t)}{r}$ και $x = r - b$, προκύπτει:

$$T(r, t) = \frac{2}{\pi r} \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left[\frac{(H-\frac{1}{b})}{\lambda} \right]^2 \right]} \left(\cos \lambda(r - b) + \frac{(H-\frac{1}{b})}{\lambda} \sin \lambda(r - b) \right) e^{-\alpha \lambda^2 t} \int_{r'=b}^{\infty} r' F(x' b) \times \right. \\ \left. \times \left(\cos \lambda(r' - b) + \frac{(H-\frac{1}{b})}{\lambda} \sin \lambda(r' - b) \right) dr' \right\} d\lambda \quad (4.4.168)$$

Γενικά Συμπεράσματα

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η κατανόηση του τρόπου αναλυτικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών στη μετάδοση θερμότητας με αγωγή, με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Για τον σκοπό αυτό, μελετήθηκαν τόσο μόνιμα όσο και μη μόνιμα προβλήματα στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων, καθώς επίσης αναδείχθηκε και ο τρόπος αντιμετώπισης μη ομογενών προβλημάτων, τα οποία περιλάμβαναν είτε μη ομογενή διαφορική εξίσωση, δηλαδή υπήρχε πηγή θερμότητας, είτε μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες, ή και τα δύο.

Μετά την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, επισημαίνουμε τα εξής:

- 1) Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών έχει ευρύ πεδίο εφαρμογών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της θερμοκρασιακής κατανομής, σε διάφορες γεωμετρίες στο καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Η χρήση αυτής της μεθόδου οδηγεί στην επίλυση μερικών ή συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.
- 2) Για την εφαρμογή της είναι απαραίτητο το πρόβλημα να είναι ομογενές, δηλαδή η διαφορική εξίσωση που το διέπει να είναι ομογενής όπως και οι συνοριακές συνθήκες με εξαίρεση μίας η οποία μπορεί να είναι μη ομογενής. Σε μη μόνιμα προβλήματα, θα πρέπει όλες οι συνοριακές συνθήκες να είναι ομογενείς, καθώς τότε η αρχική συνθήκη είναι η μη ομογενής συνθήκη.
- 3) Στην περίπτωση μη ομογενών προβλημάτων δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Το πρόβλημα της μη ομογένειας μπορεί να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπέρθεσης, κατά την οποία το μη ομογενές πρόβλημα διαιρείται σε απλούστερα ομογενή που μπορούν να επιλυθούν εύκολα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Το ζητούμενο πρόβλημα, προκύπτει από την άθροιση των επιμέρους ομογενών προβλημάτων.
- 4) Τα προβλήματα που επιλύθηκαν, θεωρήθηκαν γραμμικά εφόσον τόσο η διαφορική εξίσωση της θερμότητας, όσο και οι συνοριακές συνθήκες ήταν γραμμικές. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας θεωρήθηκε σταθερός και ανεξάρτητος της θερμοκρασίας και της διεύθυνσης, καθώς επίσης αγνοήθηκε η

συνθήκη ακτινοβολίας (η οποία είναι μη ομογενής λόγω του τεταρτοβάθμιου όρου στον νόμο Stefan-Boltzmann).

- 5) Προβλήματα με εξάρτηση του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας είτε από τη θερμοκρασία είτε από τη διεύθυνση (ανισότροπο μέσο), ή και από τα δύο:
- $k = k(T)$
 - $k = k(\vec{r})$
 - $k = k(\vec{r}, T)$

ή προβλήματα με μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες, είναι μη γραμμικά και δεν μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

- 6) Από τον χωρισμό των μεταβλητών στις κυλινδρικές συντεταγμένες, οδηγούμαστε σε διαφορικές εξισώσεις Bessel (ή σε τροποποιημένες εξισώσεις Bessel) με λύσεις τις συναρτήσεις Bessel (ή τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel) πρώτου και δεύτερου είδους.
- 7) Από τον χωρισμό των μεταβλητών στις σφαιρικές συντεταγμένες, οδηγούμαστε σε διαφορικές εξισώσεις Legendre (ή σε προσαρτημένες εξισώσεις Legendre) με λύσεις τα πολυώνυμα Legendre (ή τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre) πρώτου και δεύτερου είδους.
- 8) Μετά τον χωρισμό των μεταβλητών και την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, ακολουθεί ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών. Σε πολλές περιπτώσεις παρατηρήθηκε πως οι εξισώσεις οι οποίες περιέχουν τις ιδιοτιμές δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά διότι είναι υπερβατικές, και η επίλυσή τους πραγματοποιείται με αριθμητικές (προσεγγιστικές) μεθόδους. Επίσης, σε κάποιες περιπτώσεις οι συνοριακές συνθήκες για την εύρεση των ιδιοτιμών αντικαθίστανται από συνθήκες περιοδικότητας.
- 9) Η εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών περιορίζεται στην παρούσα διπλωματική στα τρία βασικά ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων (καρτεσιανό, κυλινδρικό, και σφαιρικό). Άλλες αναλυτικές μέθοδοι (π.χ. ολοκληρωτική μέθοδος) έχουν δυνατότητα εφαρμογής και σε άλλα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων. Εν γένει, το (μη τετριμμένο) ερώτημα περί της διαχωρισιμότητας μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης συναρτάται ισχυρά με το επιλεγόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Παράρτημα Α

Προβλήματα Συνοριακών Τιμών και Θεωρία Sturm-Liouville

Στα προηγούμενα κεφάλαια, αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις μετάδοσης θερμότητας με αγωγή, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα σύνορα ενός μέσου. Στην παρούσα ενότητα, θα γίνει μελέτη μιας γενικότερης εξίσωσης, με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Ειδικότερα, θα εξεταστεί το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας σε ράβδο με μεταβλητές ιδιότητες, παρουσία πηγής θερμότητας, με συνοριακές συνθήκες η κάθε μία από τις οποίες αφορά τη θερμότητα σε ένα από τα δύο άκρα της ράβδου. Τέτοιου είδους προβλήματα, ονομάζονται προβλήματα συνοριακών τιμών και υπάγονται στην κατηγορία προβλημάτων Sturm-Liouville, από τους Γάλλους μαθηματικούς J.C.F. Sturm και J. Liouville, οι οποίοι διατύπωσαν την ομώνυμη θεωρία για τις πραγματικές, γραμμικές δεύτερης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Πράγματι, το παραπάνω πρόβλημα εκφράζεται από την Εξ. (5.1.1), από τις συνοριακές συνθήκες (5.1.2α), και την αρχική συνθήκη (5.1.2β):

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + F(x, t) = r(x) \frac{du}{dt} \quad (5.1.1)$$

$$\frac{du(0,t)}{dx} - h_1 u(0, t) = 0, \quad \frac{du(L,t)}{dx} + h_1 u(L, t) = 0 \quad (5.1.2\alpha)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (5.1.2\beta)$$

Στη διαφορική εξίσωση (5.1.1), $u(x, t)$ είναι η θερμοκρασία της ράβδου, οι $p(x)$, $r(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, ενώ οι όροι $-q(x)u$ και $F(x, t)$ αφορούν πηγές θερμότητας. Οι συνοριακές συνθήκες Εξ. (5.1.2α), ανακύπτουν όταν σε ένα άκρο της ράβδου ο ρυθμός ροής της θερμότητας είναι ανάλογος της θερμοκρασίας. Εάν $h_1, h_2 \rightarrow \infty$ τότε προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet, ενώ αν $h_1 = h_2 = 0$, η Εξ. (5.1.2α) περιγράφει τις συνοριακές συνθήκες για μονωμένα άκρα.

Αν στην Εξ. (5.1.1) ο μη ομογενής όρος $F(x, t)$ ληφθεί ίσος με το μηδέν, τότε προκύπτει:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = r(x) \frac{du}{dt} \quad (5.1.3)$$

Η Εξ. (5.1.3), είναι μια γραμμική, ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης και μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

Αρχικά, η θερμοκρασία $u(x, t)$, γράφεται ως γινόμενο μιας συνάρτησης $X(x)$, η οποία εξαρτάται μόνο από το x , και μιας συνάρτησης $T(t)$ που εξαρτάται μόνο από το t :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (5.1.4)$$

Στη συνέχεια, το $u(x, t)$ της Εξ. (5.1.4), αντικαθίσταται στην Εξ. (5.1.3) οπότε προκύπτει:

$$[p(x)X'T']' - q(x)XT = r(x)XT' \quad (5.1.5)$$

και με διαίρεση της Εξ. (5.1.5) με το $r(x)XT$ έχουμε

$$\frac{[p(x)X']'}{r(x)X} - \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (5.1.6)$$

όπου $-\lambda$ μια σταθερά διαχωρισμού. Από την Εξ. (5.1.6), λαμβάνονται οι δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$[p(x)X']' - q(x)X + \lambda r(x)X = 0 \quad (5.1.7)$$

$$T' + \lambda T = 0 \quad (5.1.8)$$

Επίσης, με αντικατάσταση του $u(x, t)$ της Εξ. (5.1.4) στις συνοριακές συνθήκες (5.1.2α), προκύπτει

$$X'(0)T(t) - h_1X(0)T(t) = 0, \quad X'(L)T(t) + h_2X(L)T(t) = 0 \quad (5.1.9)$$

Για h_1, h_2 =σταθερά, η εξίσωση γίνεται:

$$X'(0) - h_1X(0) = 0, \quad X'(L) + h_2X(L) = 0 \quad (5.1.10)$$

Το πρόβλημα που αποτελείται από τις Εξ. (5.1.7), (5.1.10), είναι γραμμικό και ομογενές, και για κάθε τιμή του λ , έχει την τετριμμένη λύση $X(x) = 0$. Για ορισμένες τιμές του λ ωστόσο, οι οποίες λέγονται ιδιοτιμές, υπάρχουν και άλλες μη τετριμμένες λύσεις, οι ιδιοσυναρτήσεις. Η άπειρη σειρά ιδιοσυναρτήσεων που θα προκύψει, περιέχει και άγνωστους συντελεστές. Για την εύρεσή τους χρησιμοποιείται η ιδιότητα της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων. Παρακάτω γίνεται περιγραφή αυτής της ιδιότητας των ιδιοσυναρτήσεων, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν μετέπειτα για την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος Sturm-Liouville.

Ορθογωνιότητα των Ιδιοσυναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ οι οποίες ορίζονται σε ένα διάστημα $a \leq x \leq b$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι ορθογώνιες εάν ισχύει

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0 \quad (5.1.11)$$

Το διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες ονομάζεται θεμελιώδες διάστημα. Για ένα σύνολο ορθογώνιων συναρτήσεων $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ η ιδιότητα της ορθογωνιότητας εκφράζεται ως

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \frac{0}{N(\lambda)} \quad \frac{\text{αν } n \neq m}{\text{αν } n=m} \quad (5.1.12)$$

όπου $w(x)$ η συνάρτηση βάρους ($w(x) \geq 0$), και $N(\lambda)$ το ολοκλήρωμα κανονικοποίησης το οποίο υπολογίζεται ως

$$N(\lambda) = \int_a^b w(x)[\varphi_n(x)]^2 dx \quad (5.1.13)$$

Στην περίπτωση που $N(\lambda) = 1$, η συνάρτηση $\varphi_n(x)$ θεωρείται τόσο ορθογώνια όσο και κανονικοποιημένη, και ονομάζεται ορθοκανονική. Ορισμένες ορθογώνιες συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οι συναρτήσεις Bessel καθώς και τα πολυώνυμα Legendre, που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών στις καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. (Arpaci, 1966, Al-Gwaiz, 2008, Jiji, 2009).

Για την επίλυση του προβλήματος της μορφής (5.1.3), θεωρείται ένα γενικό σύστημα Sturm-Liouville, αποτελούμενο από τη γραμμική ομογενή Εξ. (5.1.14), και τις συνοριακές συνθήκες (5.1.15α) και (5.1.15β), για ένα κλειστό διάστημα $a \leq x \leq b$ (Osizik, 1989, Κραββαρίτης, 2013):

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(\lambda, x)}{dx} \right] - q(x)y(\lambda, x) + \lambda w(x)y(\lambda, x) = 0 \quad (5.1.14)$$

$$A_1 \frac{dy(\lambda, x)}{dx} + A_2 y(\lambda, x) = 0, \quad \text{στο } x = a \quad (5.1.15\alpha)$$

$$B_1 \frac{dy(\lambda, x)}{dx} + B_2 y(\lambda, x) = 0, \quad \text{στο } x = b \quad (5.1.15\beta)$$

Οι συναρτήσεις $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$ και $\frac{dp(x)}{dx}$, θεωρούνται πραγματικές, συνεχείς, καθώς επίσης ισχύει $p(x) > 0$ και $w(x) > 0$ στο διάστημα $a \leq x \leq b$. Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα ονομάζεται ομαλό. Για τα ομαλά προβλήματα Sturm-Liouville αναδεικνύεται (Al-Gwaiz M., 2008) ότι οι ιδιοτιμές λ_i είναι πραγματικές και διατεταγμένες κατά τρόπον ώστε

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Επιπλέον σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί ακριβώς μια ιδιοσυνάρτηση. Οι κανικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις σχηματίζουν ορθοκανονική βάση και ικανοποιούν την Εξ. (5.1.12) για ένα πεπερασμένο διάστημα $[a, b]$.

Τα A_1, A_2, B_1 και B_2 είναι πραγματικές σταθερές και ανεξάρτητες του λ . Οι συνοριακές συνθήκες (5.1.15α) και (5.1.15β), ονομάζονται διαχωρισμένες, καθώς η κάθε μία αφορά ένα συνοριακό σημείο. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για ορισμένες τιμές του $\lambda = \lambda_n$ οι οποίες ονομάζονται ιδιοτιμές, η Εξ. (5.1.14) έχει λύση ένα σύνολο ιδιοσυναρτήσεων, $y_n(x) = y(\lambda_n, x)$.

Για $L[y] = \lambda w(x)y$, όπου L ο γραμμικός, ομογενής τελεστής Sturm-Liouville, η Εξ. (5.1.14) γράφεται

$$L[y] = -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy(\lambda, x)}{dx} \right] + q(x)y(\lambda, x) \quad (5.1.16)$$

Εάν η συνάρτηση y της Εξ. (5.1.14), είναι συνεχής, με τμηματικά συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα $a \leq x \leq b$, και ισχύει $y(a) = y(b) = 0$, τότε η y μπορεί να αναπτυχθεί σε ημιτονική σειρά Fourier ως

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n(x) \quad (5.1.17)$$

όπου $y_n(x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα της ορθοκανονικότητας, και b_n συντελεστές οι οποίοι προκύπτουν από την Εξ. (5.1.17), πολλαπλασιάζοντας επί το $w(x)y_m(x)$ και ολοκληρώνοντας ως προς x , από $x = a$ έως $x = b$, στο δεξιό και το αριστερό μέλος της εξίσωσης, ως εξής:

$$\int_a^b w(x)y(x)y_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_a^b w(x)y_m(x)y_n(x)dx \quad (5.1.18)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ισούται με τη μονάδα για $m = n$, εφόσον οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθοκανονικές. Άρα από την Εξ. (5.1.18), προκύπτει ο συντελεστής b_n ως

$$b_n = \int_a^b w(x)y(x)y_n(x)dx \quad (5.1.19)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις Bessel και Legendre μπορούν να γραφούν σε μορφή Sturm-Liouville, συνεπώς ισχύει και για αυτές η θεωρία Sturm-Liouville.

Παράρτημα Β

Εξίσωση Bessel

Η διαφορική εξίσωση με γενική μορφή:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (6.1.1)$$

ονομάζεται εξίσωση Bessel, τάξης ν και μπορεί να γραφεί σε μορφή Sturm-Liouville ως

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0 \quad (6.1.2)$$

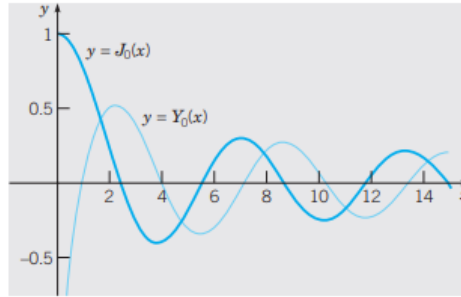
Θεωρώντας $x = \lambda r$ και $y = R(r)$, η Εξ. (6.1.1) μετατρέπεται στην εξίσωση Bessel για κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{aligned} (\lambda r)^2 \frac{d^2 R(r)}{d(\lambda r)^2} + (\lambda r) \frac{dR(r)}{d(\lambda r)} + ((\lambda r)^2 - \nu^2)R(r) &= 0 \\ \times \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right]R(r) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

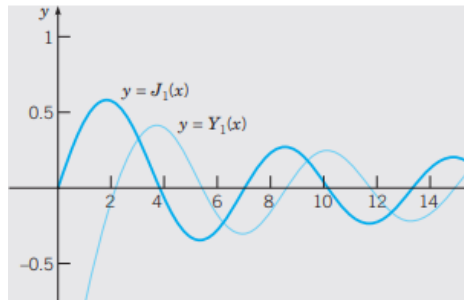
όπου λ^2 μια σταθερά διαχωρισμού. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης ως

$$R(r) = C_1 J_\nu(\lambda r) + C_2 Y_\nu(\lambda r) \quad (6.1.4)$$

όπου $J_\nu(\lambda r)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης ν , και $Y_\nu(\lambda r)$ η συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους τάξης ν , με την παράμετρο ν να περιορίζεται σε θετικούς ακεραίους. Ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται σε ένα πρόβλημα, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές λ και οι ιδιοσυναρτήσεις, οι οποίες είναι ορθογώνιες, με συνάρτηση βάρους $w(r) = r$. Στο Σχήμα 6.1.1 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης ($\nu = 0$), για διάφορες τιμές του x , ενώ στο Σχήμα 6.1.2 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις Bessel πρώτης τάξης ($\nu = 1$), για διάφορες τιμές του x .



Σχήμα 6.1.1: Συναρτήσεις Bessel J_0 και Y_0 (Boyce & DiPrima, 2017).



Σχήμα 6.1.2: Συναρτήσεις Bessel J_1 και Y_1 (Boyce & DiPrima, 2017).

Χαρακτηριστικές τιμές των συναρτήσεων Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, είναι οι παρακάτω:

$$J_0(0) = 1 \quad (6.1.5\alpha)$$

$$J_\nu(0) = 0 \text{ για κάθε } \nu \neq 0 \quad (6.1.5\beta)$$

$$Y_\nu(x \rightarrow 0) \rightarrow -\infty \text{ για κάθε } \nu \geq 0 \quad (6.1.5\gamma)$$

Δίνονται επίσης ορισμένα χρήσιμα ολοκληρώματα των συναρτήσεων Bessel ως:

$$\frac{d}{dx} [J_0(x)] = -J_1(x) \quad (6.1.6\alpha)$$

$$\frac{d}{dx} [J_0(\lambda x)] = -\lambda J_1(\lambda x) \quad (6.1.6\beta)$$

$$\frac{d}{dx} [Y_0(x)] = -Y_1(x) \quad (6.1.6\gamma)$$

$$\frac{d}{dx} [Y_0(\lambda x)] = -\lambda Y_1(\lambda x) \quad (6.1.6\delta)$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(x)] = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \quad (6.1.7\alpha)$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(\lambda x)] = \frac{\nu}{x} J_\nu(\lambda x) - \lambda J_{\nu+1}(\lambda x) \quad (6.1.7\beta)$$

$$\frac{d}{dx} [Y_\nu(x)] = \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu+1}(x) \quad (6.1.7\gamma)$$

$$\frac{d}{dx} [Y_\nu(\lambda x)] = \frac{\nu}{x} Y_\nu(\lambda x) - \lambda Y_{\nu+1}(\lambda x) \quad (6.1.7\delta)$$

Στον Πίνακα 6.1.1 παρουσιάζονται οι έξι πρώτες ιδιοτιμές του $\beta J_1(\beta) - c J_0(\beta) = 0$.

Πίνακας 6.1.1: Έξι πρώτες ιδιοτιμές του $\beta J_1(\beta) - c J_0(\beta) = 0$ (Carslaw & Jaeger, 1986).

c	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
0	0	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
0.01	0.1412	3.8343	7.0170	10.1745	13.3244	16.4712
0.02	0.1995	3.8369	7.0184	10.1754	13.3252	16.4718
0.04	0.2814	3.8421	7.0213	10.1774	13.3267	16.4731
0.06	0.3438	3.8473	7.0241	10.1794	13.3282	16.4743
0.08	0.3960	3.8525	7.0270	10.1813	13.3297	16.4755
0.1	0.4417	3.8577	7.0298	10.1833	13.3312	16.4767
0.15	0.5376	3.8706	7.0369	10.1882	13.3349	16.4797
0.2	0.6170	3.8835	7.0440	10.1931	13.3387	16.4828
0.3	0.7465	3.9091	7.0582	10.2029	13.3462	16.4888
0.4	0.8516	3.9344	7.0723	10.2127	13.3537	16.4949
0.5	0.9408	3.9594	7.0864	10.2225	13.3611	16.5010
0.6	1.0184	3.9841	7.1004	10.2322	13.3686	16.5070
0.7	1.0873	4.0085	7.1143	10.2419	13.3761	16.5131
0.8	1.1490	4.0325	7.1282	10.2516	13.3835	16.5191
0.9	1.2048	4.0562	7.1421	10.2613	13.3910	16.5251
1.0	1.2558	4.0795	7.1558	10.2710	13.3984	16.5312
1.5	1.4569	4.1902	7.2233	10.3188	13.4353	16.5612
2.0	1.5994	4.2910	7.2884	10.3658	13.4719	16.5910
3.0	1.7887	4.4634	7.4103	10.4566	13.5434	16.6499
4.0	1.9081	4.6018	7.5201	10.5423	13.6125	16.7073
5.0	1.9898	4.7131	7.6177	10.6223	13.6786	16.7630
6.0	2.0490	4.8033	7.7039	10.6964	13.7414	16.8168
7.0	2.0937	4.8772	7.7797	10.7646	13.8008	16.8684
8.0	2.1286	4.9384	7.8464	10.8271	13.8566	16.9179
9.0	2.1566	4.9897	7.9051	10.8842	13.9090	16.9650
10.0	2.1795	5.0332	7.9569	10.9363	13.9580	17.0099
15.0	2.2509	5.1773	8.1422	11.1367	14.1576	17.2008
20.0	2.2880	5.2568	8.2534	11.2677	14.2983	17.3442
30.0	2.3261	5.3410	8.3771	11.4221	14.4748	17.5348
40.0	2.3455	5.3846	8.4432	11.5081	14.5774	17.6508
50.0	2.3572	5.4112	8.4840	11.5621	14.6433	17.7272
60.0	2.3651	5.4291	8.5116	11.5990	14.6889	17.7807
80.0	2.3750	5.4516	8.5466	11.6461	14.7475	17.8502
100.0	2.3809	5.4652	8.5678	11.6747	14.7834	17.8931
∞	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	18.0711

Τροποποιημένη Εξίσωση Bessel

Η τροποποιημένη εξίσωση Bessel προκύπτει από την Εξ. (6.1.2) εάν αντί για λ^2 η σταθερά διαχωρισμού είναι $-\lambda^2$. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση γράφεται ως

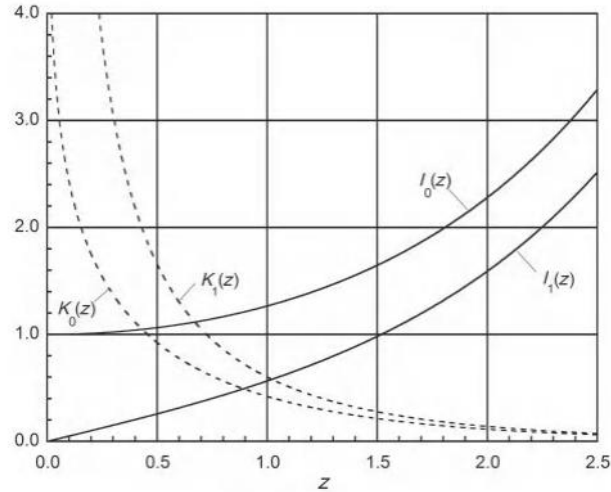
$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \left[\lambda^2 + \frac{\nu^2}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (6.1.8)$$

με γενική λύση την:

$$R(r) = C_1 I_\nu(\lambda r) + C_2 K_\nu(\lambda r) \quad (6.1.9)$$

όπου $I_\nu(\lambda r)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, τάξης ν , και $K_\nu(\lambda r)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους, τάξης ν . Η συνάρτηση βάρους είναι $w(r) = -r < 0$, επομένως οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεν είναι ορθογώνιες.

Στο Σχήμα 6.1.3 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις I_0, I_1, K_0 , και K_1 στο διάστημα $0 \leq z \leq 2.5$.



Σχήμα 6.1.3: Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel (Hahn & Özisik, 2012).

Χαρακτηριστικές τιμές των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, είναι οι παρακάτω:

$$I_0(0) = 1 \quad (6.1.10\alpha)$$

$$I_\nu(0) = 0 \text{ για κάθε } \nu \neq 0 \quad (6.1.10\beta)$$

$$K_\nu(x \rightarrow 0) \rightarrow +\infty \text{ για κάθε } \nu \geq 0 \quad (6.1.10\gamma)$$

Παρατίθενται επίσης ορισμένα χρήσιμα ολοκληρώματα:

$$\frac{d}{dx} [I(\lambda x)] = \lambda I_1(\lambda x) \quad (6.1.11\alpha)$$

$$\frac{d}{dx} [K_0(\lambda x)] = -\lambda K_1(\lambda x) \quad (6.1.11\beta)$$

$$\frac{d}{dx} [I_\nu(\lambda x)] = \frac{\nu}{x} I_\nu(\lambda x) + \lambda I_{\nu+1}(\lambda x) \quad (6.1.11\gamma)$$

$$\frac{d}{dx} [K_\nu(\lambda x)] = \frac{\nu}{x} K_\nu(\lambda x) - \lambda K_{\nu+1}(\lambda x) \quad (6.1.11\delta)$$

(Abramowitz & Stegun, 1968, Bowman, 1958, Özisik, 1987).

Πολυώνυμα Legendre

Η εξίσωση της μορφής:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] + n(n+1)M = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (6.2.1)$$

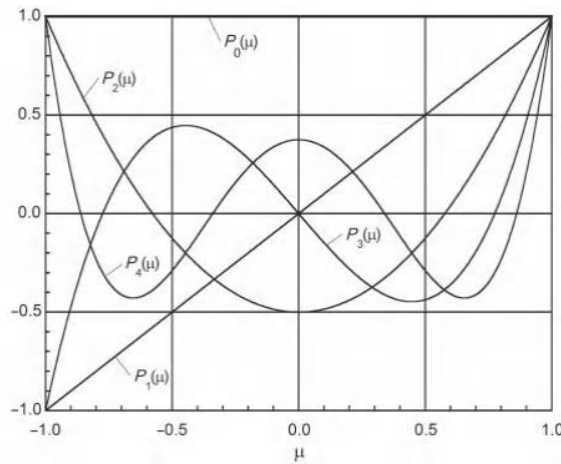
ονομάζεται εξίσωση Legendre με σταθερά διαχωρισμού $\lambda = n(n+1)$ και προκύπτει, μετά από τον χωρισμό των μεταβλητών σε προβλήματα μετάδοσης θερμότητας στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (π.χ. $T(r, \mu)$ για στερεά σφαίρα). Σημειώνεται πως η Εξ. (6.2.1) μπορεί να προκύψει από την Εξ. (5,1,14) του προβλήματος Sturm-Liouville για $p(\mu) = 1 - \mu^2$, $q(\mu) = 0$ και συνάρτηση βάρους $w(\mu) = 1$. Για θετικές και ακέραιες τιμές του n ($n = 0, 1, 2, \dots$) η λύση της εξίσωσης δίνεται από την Εξ. (6.2.2) ως

$$M(\mu) = C_1 P_n(\mu) + C_2 Q_n(\mu) \quad (6.2.2)$$

όπου $P_n(\mu)$ και $Q_n(\mu)$ τα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, βαθμού n . Τα πολυώνυμα $P_n(\mu)$ μπορούν να υπολογισθούν από τον τύπο του Rodrigues:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \quad (6.2.3)$$

Στο Σχήμα 6.2.1 παρουσιάζονται οι καμπύλες των $P_n(\mu)$ για $n = 0, 1, 2, 3$, και 4.



Σχήμα 6.2.1: Διάγραμμα των πέντε πρώτων πολυωνύμων $P_n(\mu)$ (Hahn & Özisik, 2012).

Τα πολυώνυμα Legendre δεύτερου είδους, $Q_n(\mu)$, απειρίζονται στο $\mu = \pm 1$ για κάθε τιμή του n , καθώς:

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \quad (6.2.4)$$

Επομένως η συνθήκη συνέχειας στο διάστημα $-1 \leq \mu \leq 1$ ικανοποιείται από τα πολυώνυμα $P_n(\mu)$, τα οποία είναι και ορθογώνια.

Θεωρώντας το διάστημα $0 \leq \mu \leq 1$, παρατηρείται πως $p(0) \neq 0$, με αποτέλεσμα να απαιτείται μια συνοριακή συνθήκη στο $\mu = 0$. Λαμβάνοντας τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet έχουμε:

$$P_n(\mu = 0) = 0 \quad \text{για } n = 1, 3, 5, \dots, \quad (6.2.5)$$

η οποία ικανοποιείται στο $\mu = 0$, μόνο για περιττές τιμές του n . Λαμβάνοντας επίσης την συνοριακή συνθήκη Neumann έχουμε:

$$\left. \frac{dP_n}{d\mu} \right|_{\mu=0} = 0 \quad \text{για } n = 0, 2, 4, \dots, \quad (6.2.6)$$

η οποία ικανοποιείται στο $\mu = 0$, μόνο για άρτιες τιμές του n .

Η συνθήκη ορθογωνιότητας στα διαστήματα $-1 \leq \mu \leq 1$ και $0 \leq \mu \leq 1$ περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\int_{\mu=-1}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 \\ N(n) \end{cases}, \quad (6.2.7\alpha)$$

$$N(n) = \int_{\mu=-1}^1 [P_n(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \quad (6.2.7\beta)$$

και

$$\int_{\mu=0}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq k: \text{ είτε περιττά είτε άρτια} \\ N(n), & n = k \end{cases} \quad (6.2.8\alpha)$$

$$N(n) = \int_{\mu=0}^1 [P_n(\mu)]^2 d\mu = \frac{1}{2n+1} \quad (6.2.8\beta)$$

Προσαρτημένη Εξίσωση Legendre

Η εξίσωση Legendre της μορφής:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] M = 0 \quad (6.2.9)$$

ονομάζεται προσαρτημένη εξίσωση Legendre με σταθερά διαχωρισμού $\lambda = n(n+1)$, με n θετικό και ακέραιο, και $m \leq n$. Η λύση της εξίσωσης δίνεται ως

$$M(\mu) = C_1 P_n^m(\mu) + C_2 Q_n^m(\mu) \quad (6.2.10)$$

όπου $P_n^m(\mu)$ και $Q_n^m(\mu)$ τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, βαθμού n και τάξης m . Παρατηρείται πως για $m = 0 \rightarrow P_n^0(\mu) = P_n(\mu)$.

Τα πολυώνυμα $Q_n^m(\mu)$ δεν είναι συνεχή στα σημεία $\mu = \pm 1$, αλλά τείνουν στο άπειρο για κάθε τιμή του n και του m . Τα πολυώνυμα $P_n^m(\mu)$ είναι συνεχή στο διάστημα $-1 \leq \mu \leq 1$, και η συνθήκη ορθογωνιότητας περιγράφεται από την Εξ. (6.2.11) ως

$$\int_{\mu=-1}^1 P_n^m(\mu) P_k^m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ N(n, m), & n = k \end{cases} \quad (6.2.11)$$

με

$$N(n, m) = \int_{\mu=-1}^1 [P_n^m(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (6.2.12)$$

(Aboites, 2019, Gradshteĭn et al., 2007, Abramowitz M., 1968).

Βιβλιογραφία

- Aboites, V. (2019). *Legendre Polynomials: A Simple Methodology*. Journal of Physics: Conference Series, 1221, 012035. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1221/1/012035>
- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Government Printing Office. 10th printing.
- Al-Gwaiz, M. (2008). *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer.
- Arpaci, V. S. (1966). *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley.
- Babiarz, B. & Szymański, W. (2020). *Introduction to the Dynamics of Heat Transfer in Buildings*. *Energies*, 13(23), Article 23. <https://doi.org/10.3390/en13236469>
- Balaji, N., Mani, M. & Reddy, B. (2014). *Discerning Heat Transfer in Building Materials*. *Energy Procedia*, 54, 654–668. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2014.07.307>
- Bergman, T. L., Bergman, T. L., Incropera, F. P., DeWitt, D. P. & Lavine, A. S. (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley.
- Bochner, S. & Trust, S. (1959). *Lectures on Fourier Integrals*. Princeton University Press.
- Bourne-Webb, P. J., Amatya, B. & Soga, K. (2013). *A framework for understanding energy pile behaviour*. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Geotechnical Engineering*, 166(2), 170–177. <https://doi.org/10.1680/geng.10.00098>
- Bowman, F. (1958). *Introduction to Bessel Functions*. Courier Corporation.

- Boyce, W. E. & DiPrima, R. C., Maede D.B (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 11th edition, Wiley.
- Branco, F. A. & Mendes, P. A. (1993). *Thermal Actions for Concrete Bridge Design*. Journal of Structural Engineering, 119(8), 2313–2331. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1993\)119:8\(2313\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1993)119:8(2313))
- Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C. (1986). *Conduction of Heat in Solids* (2nd edition). Oxford University Press.
- Cengel, Y. A. (2006). *Heat Transfer: A Practical Approach*. 3rd edition, McGraw-Hill.
- Davies, M. G. (2004). *Building Heat Transfer*. Wiley.
- Drysdale, D. (2011). *An Introduction to Fire Dynamics*. 3rd edition, Wiley.
- Faghri, M. & Sundén, B. (Eds.). (2008). *Transport phenomena in fires*. WIT Press.
- Gerlich, V. (2011). *Modelling Of Heat Transfer In Buildings*. Proceedings of 25th European Conference on Modelling and Simulation.
- Cengel & Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications*. 5th edition, McGraw-Hill.
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. & Jeffrey, A. (2007). *Table of integrals, series, and products*, 7th edition. Academic Press.
- Hahn, D. W. & Özisik, M. N. (2012). *Heat Conduction*. Wiley.
- Han, J.-C. (2016). *Analytical Heat Transfer*. CRC Press.
- Hermansson, Å., Charlier, R., Collin, F., Erlingsson, S., Laloui, L. & Sršen, M. (2009). *Heat Transfer in Soils*. In A. Dawson (Ed.), *Water in Road Structures* (Vol. 5, pp. 69–79). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8562-8_4

- Hirbodi, K. & Jafarpur, K. (2020). *A simple and accurate model for conduction shape factor of hollow cylinders*. International Journal of Thermal Sciences. Vol. 153. Article 106362.
- Huang, H.-C. & Usmani, A. S. (1994). *Finite Element Analysis for Heat Transfer*. Springer.
- John H. Lienhard (2019). *A Heat Transfer Textbook*, 5th edition. Phlogiston Press.
- Jiji, L. M. (2009). *Heat Conduction*. Springer.
- Kothandaraman, C. P. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. New Age International.
- Kreith, F., Manglik, R. M. & Bohn, M. S. (2010). *Principles of Heat Transfer*. Cengage Learning.
- Kusuda, T. (1977). *Fundamentals of building heat transfer*. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 82(2), 97. <https://doi.org/10.6028/jres.082.008>
- Lataille, J. I. (2003). *Fire protection engineering in building design*. Butterworth-Heinemann.
- Learning, L. (2017). *Heat conduction equation in spherical coordinates*. Medium. <https://medium.com/@lucidlearning314/heat-conduction-equation-in-spherical-coordinates-b5f5e919e1ec>
- Lennon, T. (2011). *Structural Fire Engineering*. ICE Publishing.
- Minkowycz W.J. et.al (2006). *Handbook of Numerical Heat Transfer*. 2nd edition, Wiley.
- O'Connor, D. J. (2016). *The Building Envelope: Fire Spread, Construction Features and Loss Examples*. In M. J. Hurley, D. Gottuk, J. R. Hall, K. Harada, E. Kuligowski, M. Puchovsky, J. Torero, J. M. Watts, & C. Wieczorek (Eds.), *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering* (pp. 3242–3282). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2565-0_86
- Moss, K. J. (2007). *Heat and Mass Transfer in Buildings*. 2nd edition. Taylor & Francis.
- Özisik, M. N. (1989). *Boundary Value Problems of Heat Conduction*. Dover.
- Papoulis, A. (1962). *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill.

- Poularikas, E. A. D. (1999). *“Bessel Functions”. The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*. CRC Press.
- Pupeikis, D., Stankevičius, V. & Burlingis, A. (2010a). *The effect of the Fourier number on calculation of an unsteady heat transfer of building walls*. Journal of Civil Engineering and Management, 16(2), Article 2. <https://doi.org/10.3846/jcem.2010.34>
- Pupeikis, D., Stankevičius, V. & Burlingis, A. (2010b). *The effect of the Fourier number on calculation of an unsteady heat transfer of building walls*. Journal of Civil Engineering and Management, 16(2), 298–305. <https://doi.org/10.3846/jcem.2010.34>
- Purkiss, J. A. (2013). *Fire Safety Engineering Design of Structures*, Third Edition. CPR Press
- Quintiere, J. G. (2002). *Fire behavior in building compartments*. Proceedings of the Combustion Institute, 29(1), 181–193. [https://doi.org/10.1016/S1540-7489\(02\)80027-X](https://doi.org/10.1016/S1540-7489(02)80027-X)
- Rohsenow, W. M., Hartnett, J. P. & Cho, Y. I. (1998). *Handbook of Heat Transfer*. McGraw-Hill.
- Simões, N., Prata, J. & Tadeu, A. (2019). *3D Dynamic Simulation of Heat Conduction through a Building Corner Using a BEM Model in the Frequency Domain*. Energies, 12(23), 4595. <https://doi.org/10.3390/en12234595>
- Taler, J. & Duda, P. (2006). *Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems*. Springer.
- Tang, R., Meir, I. A. & Etzion, Y. (2003). *Thermal behavior of buildings with curved roofs as compared with flat roofs*. Solar Energy, 74(4), 273–286. [https://doi.org/10.1016/S0038-092X\(03\)00193-2](https://doi.org/10.1016/S0038-092X(03)00193-2)
- Titchmarsh, E. C. (1948). *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Clarendon Press.
- Wang, L., Zhou, X., & Wei, X. (2008). *Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions*. Springer.

- Welty, J., Rorrer G.L. et al. (2019). *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 7th edition. Wiley.
- Wendl, M. C. (2012). *Theoretical Foundations of Conduction and Convection Heat Transfer*. The Wendl Foundation.
- Whitaker, S. (1977). *Fundamental Principles of Heat Transfer*. Elsevier.
- Wiener, N. (1989). *The Fourier Integral and Certain of Its Applications*. Cambridge University Press.
- Wickström, U. (2016). *Temperature Calculation in Fire Safety Engineering*. Springer.
- Yevtushenko, A. A. & Kuciej, M. (2012). *One-dimensional thermal problem of friction during braking: The history of development and actual state*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55, 4148–4153. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.03.056>

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Κραββαρίτης Δ. Χ. (2013). *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*. Εκδόσεις Τσότρας.