



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ – ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗΝ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΜΕΛΑΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Τριανταφύλλου Χαρούλα

chtriantafyllou@uth.gr

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΦΥΣΙΚΗ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση
του Μεταπτυχιακού Τίτλου "Εφαρμοσμένη Φυσική"

Λαμία – Φεβρουάριος 2023

©2023 Χαρούλα Τριανταφύλλου

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Φυσικής της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων): *Νικόλαος Πετρόπουλος*

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής: *Διονύσιος Βαβουγιός*

Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής: *Άγγελος Αβραμόπουλος*

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Πετρόπουλο, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κ. Διονύσιο Βαβουγιό και κ. Άγγελο Αβραμόπουλο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Οφείλω ευχαριστίες σε όλους τους καθηγητές του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας που δίδαξαν στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών "Εφαρμοσμένη Φυσική" για την τεράστια βοήθεια τους στο νέο μου ξεκίνημα στην επιστήμη της Φυσικής. Ευχαριστώ τους φίλους μου Δημήτρη Αγγελή και Ειρήνη Φαροπούλου για την ηθική υποστήριξή τους. Επίσης, ευχαριστώ τον σύζυγο Σπύρο και την κόρη μου Κωνσταντίνα, για την κατανόησή τους, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών, της προσπάθειάς μου. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην κόρη μου.

Χαρούλα Τριανταφύλλου

Σύγχρονη προσέγγιση στην ακτινοβολία μέλανος σώματος

Χαρούλα Τριανταφύλλου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Φυσικής, Φεβρουάριος 2023

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Πετρόπουλος – Επίκουρος Καθηγητής

Περίληψη

Τον 19ο αιώνα η κλασική φυσική που επικρατούσε, αδυνατούσε να αντιμετωπίσει όλα τα ζητήματα των άλλων επιστημών που προέκυπταν. Επομένως επαναστάτησε η Σύγχρονη Φυσική και συγκεκριμένα η χρήση της Κβαντικής Θεωρίας. Ένα ενδιαφέρον θέμα προς μελέτη, ήταν αυτό της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Έγιναν απόπειρες προσέγγισης από τον Wien, τους Stefan-Boltzmann και τους Rayleigh-Jeans, των οποίων οι νόμοι που εφαρμόστηκαν δεν κατέληξαν σε ορθό συμπέρασμα. Αργότερα ο Max Planck είχε την ιδέα της κβάντωσης της ενέργειας όπου κατέληξε σε ακριβή προσέγγιση. Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιαστούν αναλυτικά οι βασικοί υπολογισμοί της θεωρίας του μέλανος σώματος, να γίνουν τα απαραίτητα γραφήματα των νόμων που προαναφέραμε καθώς και να δοθούν παραδείγματα και εφαρμογές που μπορούμε να συναντήσουμε στην καθημερινή μας ζωή.

Λέξεις Κλειδιά: *Κβαντική Θεωρία, Θερμική ακτινοβολία, μέλαν σώμα, Planck, σύγχρονη φυσική, ηλεκτρομαγνητικά κύματα.*

A modern perspective of black body radiation**Charoula Triantaphillou****University of Thessaly, Physics Department, February 2023****Supervisor: Nicholas Petropoulos – Assistant Professor****Abstract**

In the 19th century, the prevailing classical physics was unable to deal with all the issues of the other sciences that arose. Therefore, Modern Physics revolutionized and specifically the use of Quantum Theory. An interesting topic to study, was that of blackbody radiation. Approaches were attempted by Wien, Stefan{Boltzmann and Rayleigh{Jeans, whose laws that were applied did not reach a correct conclusion. Later Max Planck had the idea of quantization of energy where he came with at an accurate approximation. The aim of the thesis is to present in detail the basic calculations of the black body theory, to make the necessary graphs of the laws which mentioned above as well as to give examples and applications that we can encounter in our daily life.

Keywords: *Quantum Theory, thermal radiation, black body, Planck, Modern Physics, electromagnetic waves.*

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	11
1.1 Ιστορική αναδρομή	12
1.2 Κλασική και Σύγχρονη Φυσική	13
1.3 Παλαιά Κβαντική Θεωρία	14
1.4 Γένεση της Κβαντικής Θεωρίας	15
2 Ιδιότητες της ακτινοβολίας	19
2.1 Ιδιότητες της ακτινοβολίας	20
2.2 Θερμική ακτινοβολία	20
2.3 Φάσμα θερμικής ακτινοβολίας	22
2.4 Εκπομπή και απορρόφηση ακτινοβολίας	22
3 Μέλαν Σώμα	25
3.1 Μέλαν σώμα	26
3.2 Ακτινοβολία μέλανος σώματος	27
3.3 Ένα πρότυπο μέλανος σώματος	29
3.4 Ισχύς ακτινοβολίας μέλανος σώματος	32
3.5 Ενέργεια ακτινοβολίας μέλανος σώματος	33

4 Απόπειρα κλασικής ερμηνείας	35
4.1 Η υπεριώδης καταστροφή	36
4.2 Προσέγγιση του νόμου των Rayleigh-Jeans	37
4.3 Το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο και στο χρόνο	39
4.4 Η τρισδιάστατη εξίσωση κύματος	40
4.5 Ακτινοβολία σε κυβική κοιλότητα	41
4.6 Συνολικός αριθμός καταστάσεων	45
4.7 Η ενέργεια ανά μονάδα όγκου, μήκους κύματος και συχνότητας	47
5 Ο νόμος μετατόπισης του Wien	49
5.1 Ο νόμος του Wien	50
5.2 Εφαρμογές του νόμου μετατόπισης στην αστρονομία	52
5.3 Περιορισμοί	53
6 Ο νόμος των Stefan-Boltzmann	57
6.1 Ο νόμος των Stefan-Boltzmann	58
6.2 Boltzmann ο πρωτοπόρος της μοντέρνας φυσικής	59
6.3 Δύο διατυπώσεις του νόμου των Stefan-Boltzmann	59
6.3.1 Πυκνότητα ενέργειας $u(T)$	59
6.3.2 Ένταση ακτινοβολίας I	60
6.4 Από τον Planck στους Stefan-Boltzmann	61
6.5 Παρατηρήσεις για την εξίσωση Stefan – Boltzmann	67
6.6 Το φαινόμενο θερμοκηπίου	68
7 Ο νόμος του Planck για την ακτινοβολία	71
7.1 Η προ Planck εποχή	72

7.2 Τι είναι ο κβαντισμένος ταλαντωτής	74
7.3 Απόδειξη του νόμου Planck	75
7.4 Η συνάρτηση Planck στο εύρος συχνοτήτων	77
8 Συμπεράσματα	85
Παραρτήματα	87
Αναφορές – Βιβλιογραφία	95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο συνθέτει μια περιεκτική εισαγωγή στην θεματική ενότητα της Κλασικής και Σύγχρονης Φυσικής. Αρχίζουμε με μια ιστορική αναδρομή στην αναγκαιότητα που προέκυψε να μεταβούμε από την Κλασική στη Σύγχρονη Φυσική. Στην συνέχεια γίνεται λόγος στη διαίρεση της Σύγχρονης Φυσικής σε Κβαντικές Θεωρίες καθώς και στις Θεωρίες της Σχετικότητας. Επομένως η Θεωρία της Σχετικότητας (Ειδική και Γενική) θα μπορούσε να ενταχθεί με την ευρύτερη έννοια στο γενικό πλαίσιο της Κλασικής Φυσικής. Κάτι τέτοιο, δεν ισχύει για την κβαντική θεωρία η οποία από κάθε σκοπιά υπήρξε μια πραγματική επανάσταση που άλλαξε ολοκληρωτικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και περιγράφουμε τα φυσικά φαινόμενα.

1.1 Ιστορική αναδρομή

Τον 17ο αιώνα ο Isaac Newton και πολλοί άλλοι επιστήμονες ερμήνευσαν την κίνηση των σωμάτων. Η Κλασική Μηχανική αποτελείται από τις κινήσεις όλων των σωμάτων, από ένα μπαλάκι του τένις μέχρι τους πλανήτες, πράγμα το οποίο παρατηρείται στην καθημερινή μας εμπειρία, στον μακρόκοσμο. Στο μικρόκοσμο όμως, στην μελέτη των ατόμων και των μορίων, τα πράγματα αλλάζουν. Η Κλασική Μηχανική δεν μπορεί να περιγράψει τα φαινόμενα σε αυτή την κλίμακα και επομένως εισάγεται η Κβαντική Μηχανική. Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα η Κβαντική Θεωρία άρχισε, με τις ιδέες των de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Planck και άλλων φυσικών. Έτσι λοιπόν η Κβαντομηχανική ξεκινάει από την Πυρηνική και Ατομική Φυσική, τα Κβαντικά φαινόμενα Σήραγγας, τη Σύγχρονη Χημεία, την εξήγηση του Περιοδικού Πίνακα, τα Transistors, την Αστροφυσική, την Υπεραγωγιμότητα, τα Laser, τις μαύρες τρύπες και την ακτινοβολία Hawking. Μελετώντας την συμπεριφορά των Κβαντικών αντικειμένων, αντιλαμβανόμαστε όλες τις μορφές της ύλης, από τους Υπεραγωγούς μέχρι τους Αστέρους Νετρονίων [Bonacci, 2021].

Όμως στο τέλος του 19ου αιώνα οι φυσικοί θεωρούσαν πως δεν πρόκειται να ανακαλυφθεί τίποτα σπουδαίο, γιατί είχαν πραγματοποιηθεί οι μεγάλες ανακαλύψεις και η επιστήμη της Φυσικής είχε οδηγηθεί στον τελικό της σκοπό, να ερμηνεύσει τον υλικό κόσμο που μας περιβάλλει. Μετά από κάποια διαδικασία πολλών αιώνων που όλοι οι νόμοι ενώθηκαν και συνδέθηκαν περιγράφονταν από εξισώσεις που έδειχναν την εξήγηση όλων των φυσικών φαινομένων. Συγκεκριμένα ο Τραχανάς [Τραχανάς, 2005] υποστηρίζει τη δήλωση του Michelson το 1899 ότι "οι σημαντικότεροι θεμελιώδεις νόμοι και περιστατικά της επιστήμης της φυσικής έχουν ανακαλυφθεί και σήμερα είναι εδραιωμένοι με τόση σταθερότητα, ώστε η περίπτωση να αντικατασταθούν κάποια στιγμή εξαιτίας νέων ανακαλύψεων φαίνεται πολύ μακρινή". Την επόμενη κιόλας χρονιά διατυπώνεται από τον Planck η θεωρία των Κβάντα και πέντε χρόνια αργότερα διατυπώνεται από τον Einstein ο Κυματοσωματιδιακός Δυϊσμός του φωτός, βασιζόμενος στα Κβάντα του φωτός.

Υποστηρίζεται ότι η Κβαντική Μηχανική γεννήθηκε ακριβώς το 1900. Έτσι ξεκινά η δεύτερη επιστημονική επανάσταση στη Φυσική που σηματοδοτεί την εμφάνιση της Σύγχρονης Φυσικής [Velentzas et al., 2007]. Μπαίνουν τα θεμέλια για δύο από τις βασικότερες θεωρίες του 20ου αιώνα, της Κβαντομηχανικής και λίγο αργότερα της Ειδικής Θεωρίας της

Σχετικότητας. Μάλιστα ο Rovelli [Rovelli, 2005] επισημαίνει πως "αν ο Planck θεωρείται πατέρας της (Κβαντικής) Θεωρίας, ο Einstein είναι ο γονιός που την μεγάλωσε". Αργότερα θα προκύψουν πολλές επιστημονικές αντιπαραθέσεις που αφορούν το περιεχόμενο και την ερμηνεία της. Αυτή όμως που ξεχώρισε ήταν ανάμεσα στους μεγαλύτερους Φυσικούς του 20ου αιώνα, τον Bohr και τον Einstein. Πιο συγκεκριμένα εκφράζοντας δύο διαφορετικές σχολές ξεκίνησαν από τη διαφορετική ερμηνεία της Κβαντομηχανικής και στη συνέχεια διατύπωσαν δύο διαφορετικές φιλοσοφικές θέσεις σχετικές με την ερμηνεία της πραγματικότητας. Με την ίδια λογική δημιουργείται η ερμηνεία της Κοπεγχάγης η οποία παρουσιάζει μια νέα ερμηνεία του φυσικού κόσμου. Ο Bohr θεωρούσε ότι η Κβαντική Μηχανική θεωρείται μια ολοκληρωμένη, θεμελιώδης θεωρία της φύσης, και στήριξε τη θεωρία του στην πεποίθηση αυτή, όπου κατέληξε στην παρακάτω άποψη: "Δεν υπάρχει Κβαντικός κόσμος. Υπάρχει μόνο μια Κβαντομηχανική περιγραφή". Έτσι δεν μπορούμε να θεωρούμε ότι στόχος της φυσικής είναι η ανακάλυψη της φύσης. Η φυσική σχετίζεται με το τι μπορούμε να εννοήσουμε για τη φύση [Petersen, 1963]. Ο Einstein, επέλεξε την εναλλακτική προσέγγιση και στήριξε τη δική του εκτίμηση όσον αφορά την Κβαντική Μηχανική, θεωρώντας σίγουρο ότι υπάρχει μια πραγματικότητα παρότι αναγνώριζε τη συνέπεια και τη συμφωνία της Κβαντομηχανικής με τα πειραματικά δεδομένα. Επομένως, δε θα μπορούσε να αποδεχθεί την θεωρία της Κοπεγχάγης και ισχυρίστηκε ότι "το εγχείρημα που ονομάζουμε επιστήμη έχει βασικό σκοπό να ορίσει το τι υπάρχει" [Einstein, 2011].

1.2 Κλασική και Σύγχρονη Φυσική

Στα τέλη του 19ου αιώνα η Φυσική εκείνης της εποχής, δηλαδή αυτό που λέμε σήμερα Κλασική Φυσική, θεωρούνταν αμετάβλητη. Οι φυσικοί της τότε εποχής πίστευαν πως όλα τα θεμελιώδη θέματα είχαν ήδη λυθεί. Η κατανόηση κάποιων φαινομένων ήταν πρόβλημα μιας εφαρμογής των βασικών θεμελιωδών αρχών και επίλυσης των βασικών διαφορικών εξισώσεων που αναφέρονται στους θεμελιώδεις νόμους της Φύσης. Η άποψη αυτή υποστηρίζονταν, εκτός από τις μεγάλες επιτυχίες της Κλασικής Μηχανικής στην ανάλυση των ουρανίων σωμάτων και από τις υπόλοιπες φυσικές επιστήμες. Η Κινητική Θεωρία δηλαδή συνέδεσε τη Στατιστική Μηχανική με την Θερμοδυναμική. Με τον ίδιο τρόπο, η Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία του Maxwell συνέδεσε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα

με τα οπτικά φαινόμενα, αποδεικνύοντας ότι το φως είναι Ηλεκτρομαγνητική Ακτινοβολία. Τέλη του 19ου και αρχές του 20ου αιώνα, προέκυψαν κάποια αποτελέσματα από πειράματα που ήταν αδύνατον να ερμηνευθούν με την εφαρμογή των γνωστών βασικών θεωριών. Χρειάστηκε τότε να αναθεωρηθούν αυτές οι ίδιες βασικές αρχές και αυτό είχε ως αποτέλεσμα δυο διαφορετικές "επαναστάσεις" στη φυσική: Τη Θεωρία της Σχετικότητας και τη Θεωρία των Κβάντα (που αργότερα διαμορφώθηκε στην Κβαντομηχανική). Στην πραγματικότητα η Θεωρία της Σχετικότητας και η Θεωρία των Κβάντα δεν ήταν μόνο δύο καινούργιες θεωρίες. Ήταν ειρηνικές επαναστάσεις που επέφεραν ριζικές μεταβολές στον τρόπο που καταλαβαίνουμε και σχεδιάζουμε τον φυσικό κόσμο. Οι αλλαγές αυτές που σήμερα είναι στη βάση όλης της Σύγχρονης Φυσικής, είναι δύσκολο να παρατηρηθούν επειδή είναι αισθητές σε συνθήκες μακριά από την καθημερινή εμπειρία. Οι αλλαγές που φέρνει η Θεωρία της Σχετικότητας ξεκινούν να είναι αισθητές για μεγάλες ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 300.000 \text{ km s}^{-1}$. Οι αλλαγές που φέρνει η Κβαντική Θεωρία - Κβαντομηχανική αφορούν μικροσκοπικά αντικείμενα με τυπικές διαστάσεις μερικών Ångstrom, Å ($1\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$) ή και μικρότερες. Θα πρέπει να επισημάνουμε πως ενώ η Θεωρία της Σχετικότητας άλλαξε ριζικά σημαντικούς νόμους και απόψεις της Κλασικής Φυσικής, η Κβαντική Θεωρία άλλαξε επίσης επαναστατικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και περιγράφουμε τη Φύση. Επομένως, η Θεωρία της Σχετικότητας, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι βρίσκεται πιο κοντά στην Κλασική φυσική από την Κβαντική Θεωρία. Η Κβαντική Θεωρία, που ξεκίνησε την ίδια περίπου εποχή με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (1905), βελτιώθηκε και ολοκληρώθηκε διαδοχικά σε Κβαντομηχανική, Σχετικιστική Κβαντομηχανική και Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Η Κβαντική Θεωρία από τις αρχές του 20ου αιώνα μέχρι την πλήρη θεμελίωση της Κβαντομηχανικής περίπου είκοσι πέντε χρόνια αργότερα, είναι ονομαστή ως Παλαιά Κβαντική Θεωρία. Η Παλαιά Κβαντική Θεωρία περιέχει ένα πολύ μεγάλο μέρος από τη Φυσική και τον πλούτο των ιδεών της Κβαντομηχανικής, χωρίς τον σύνθετο μαθηματικό φορμαλισμό της τελευταίας. [Serway et al., 2004]

1.3 Παλαιά Κβαντική Θεωρία

Όταν δημιουργήθηκε η Κβαντική θεωρία, αποτελούνταν από συμπεράσματα των πρώτων ιδεών σχετικά με την ιδέα της κβάντωσης και αποτέλεσε αφετηρία για την κατασκευή

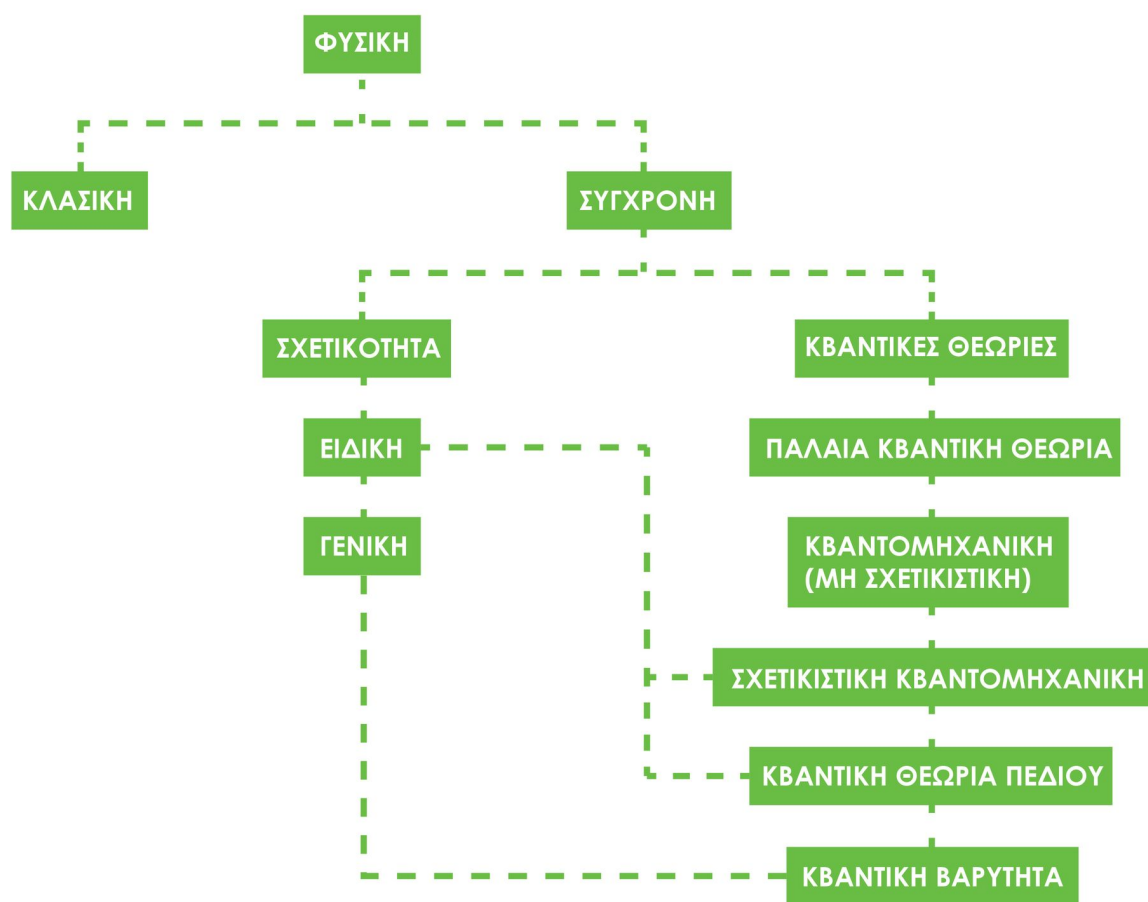
της Σύγχρονης Κβαντομηχανικής. Ωστόσο η Παλαιά κβαντική Θεωρία δεν θεωρήθηκε ότι προέκυψε ή συνεχίστηκε από την Κλασική Θεωρία ή ότι ήταν προαπαιτούμενη για την μορφή που έχει σήμερα [Styer, 2000]. Παρόλο τις επιτυχίες της, η πρώτη Κβαντική Θεωρία αντιμετώπιζε πολλά προβλήματα. Ένα βασικό πρόβλημα που ήταν αναγκαίο να λυθεί ήταν η επιμονή στο μοντέλο κβάντωσης των ατομικών ενεργειακών σταθμών, όπου ο Bohr δεν το είχε αποδείξει αλλά το είχε αποδεχθεί. Επίσης είχε αποδεχθεί και ότι στις επιτρεπόμενες τροχιές το άτομο δεν ακτινοβολεί (γεγονός που θεωρεί τις τροχιές σταθερές). Ένα ακόμη πρόβλημα ήταν ότι δεν μπορούσε να προβλέψει τις εντάσεις και τις πολώσεις των ακτινοβολιών που εκπέμπονται από τα άτομα. Την ίδια ακριβώς εποχή που διατύπωνε μια θεωρία μαζί με τον Sommerfeld, ο Bohr προέβλεπε με ακρίβεια τις μεταβάσεις στα άτομα υδρογόνου. Το 1923 έως 1924 ήταν ένας χρόνος που τα προβλήματα από πειράματα και γενικά η δυσaréσκεια για την δομή της κβαντικής θεωρίας αντιμετώπιζαν κρίση. Στην Παλαιά Κβαντική Θεωρία, η Κλασική Φυσική συνέχιζε να υφίσταται, συμπεριλαμβανομένη την έννοια της κβάντωσης για κάποια φυσικά μεγέθη, όπως την ενέργεια. Η ένωση Κλασικών και μη Κλασικών υποθέσεων, δείχνει πως αποτελούσε βασικό μειονέκτημα της πρώτης κβαντικής θεωρίας. Η προσπάθεια των επιστημόνων να ξεπεραστεί η κρίση αυτή αφορούσε την βασική αρχή της θεωρίας που ήταν φυσικά το ατομικό μοντέλο του Bohr, το οποίο απαιτούσε απαραίτητα κάποιου είδους επιπλέον εξήγηση που δεν θα είχε κλασική προέλευση [Kragh, 2004]. Το 1923 ο Born έγραφε "Το όλο σύστημα της φυσικής απαιτεί ανασυγκρότηση από την αρχή". Σε μια εργασία του το 1924 ο Born εισήγαγε για πρώτη φορά τον όρο "Κβαντική Μηχανική" και πίστευε πως η θεωρία αυτή θα αντικαθιστούσε στο μέλλον την ατομική θεωρία Bohr – Sommerfeld [Kragh, 2004].

1.4 Γένεση της Κβαντικής Θεωρίας

Στην πορεία μιας επιτυχημένης προσπάθειας να επιλύσει ορισμένες αντιφάσεις ανάμεσα στο παρατηρούμενο ενεργειακό φάσμα της θερμικής ακτινοβολίας και στις προβλέψεις της κλασικής θεωρίας, ο Planck οδηγήθηκε στην ιδέα ότι ένα σύστημα, που εκτελεί απλές αρμονικές ταλαντώσεις, μπορεί να έχει ενέργειες, οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια ενός ορισμένου πεπερασμένου ποσού ενέργειας (1901). Μια συγγενική ιδέα εφαρμόστηκε αργότερα από τον Einstein, στην ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου (1905) και από τον Bohr σε μια θεωρία που πρόβλεπε με μεγάλη ακρίβεια πολλά

από τα σύνθετα χαρακτηριστικά των ατομικών φασμάτων (1913). Το έργο των τριών αυτών φυσικών, μαζί με τις μεταγενέστερες εργασίες των de Broglie, Schroedinger και Heisenberg (1925), συγκροτούν τη λεγόμενη Κβαντική Θεωρία. Η θεωρία αυτή, μαζί με τη Θεωρία της Σχετικότητας, περιέχουν τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της Σύγχρονης Φυσικής [Eisberg, 1995]. Σήμερα η έννοια της Κβαντικής Θεωρίας περιλαμβάνει, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1 :

- Τη μη Σχετικιστική Κβαντομηχανική, η οποία αποτελεί μια έμπεριστατωμένη και πολύ καλά θεμελιωμένη κατηγορία της Παλαιάς Κβαντικής Θεωρίας. Η Κβαντομηχανική περιγράφει πλήρως σωματίδια του μικρόκοσμου με ταχύτητες μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό.
- Τη Σχετικιστική Κβαντομηχανική, η οποία συνδυάζει τις βασικές ιδέες της Κβαντομηχανικής και της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Περιγράφει σωματίδια με ταχύτητες μικρότερες της ταχύτητας του φωτός στο κενό.
- Την Κβαντική Θεωρία Πεδίου που είναι χρήσιμη στο να περιγράψει αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων του μικρόκοσμου όπου λόγω αυτών αλλάζει και το πλήθος των σωματιδίων. Μια αρκετά μεγάλη επιτυχία της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου είναι η λεπτομερής περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και ο τρόπος με τον οποίο αλληλεπιδρούν τα ηλεκτρόνια με αυτό.
- Την Κβαντική Βαρύτητα η οποία είναι ένας συνδυασμός της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας με την Κβαντική Θεωρία πεδίου. Αυτή η θεωρία είναι χρήσιμη στην Κοσμολογία για την περιγραφή των αρχικών βημάτων στην αλλαγή του σύμπαντος [Perivolaropoulos, 2015].



Σχήμα 1.1. Διάρθρωση της Φυσικής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ιδιότητες της ακτινοβολίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξηγήσουμε την έννοια της θερμικής ακτινοβολίας καθώς και τις ιδιότητες της. Θα αναφερθούμε στο φάσμα της ακτινοβολίας, όπου λόγω της θερμοκρασίας βλέπουμε τα σώματα είτε πιο έντονα, είτε αμυδρά. Στη συνέχεια θα γίνει μια σύντομη περιγραφή στη διαδικασία εκπομπής και απορρόφησης της ακτινοβολίας από επιφάνειες. Όλα τα θερμά σώματα έχουν την ικανότητα αυτή λόγω των επιταχύνσεων των ηλεκτρικών φορτίων, που οφείλεται σε θερμική αναταραχή στην επιφάνεια τους. Όταν η εκπομπή και η απορρόφηση της ακτινοβολίας γίνουν ίσες, τότε μιλάμε για θερμική ισορροπία.

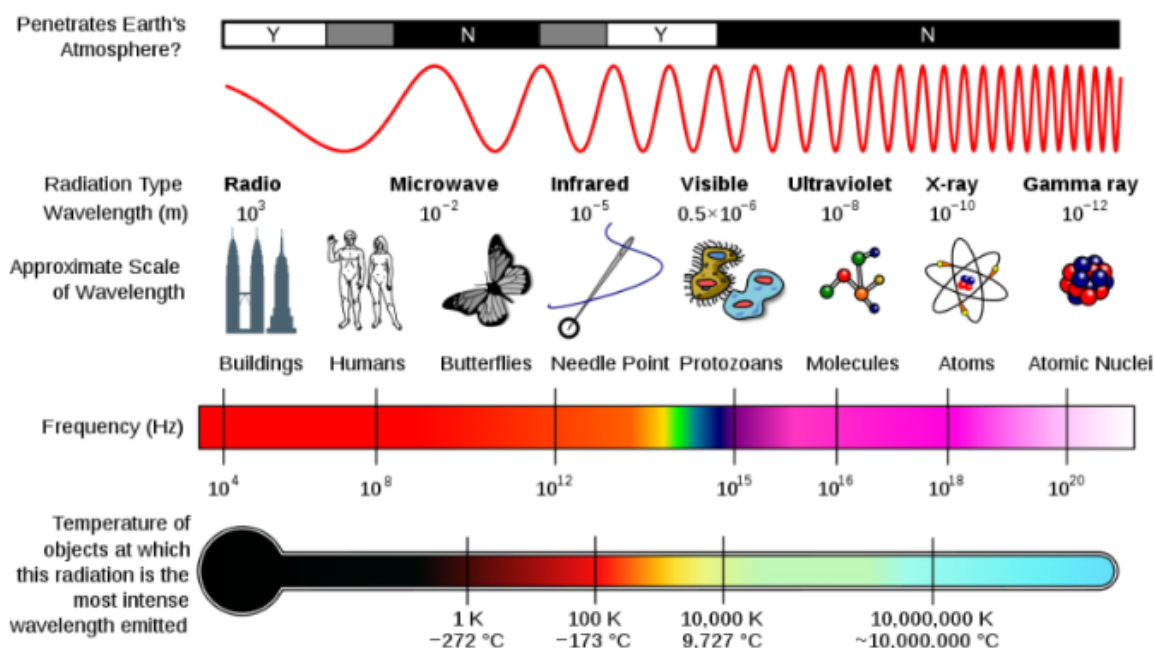
2.1 Ιδιότητες της ακτινοβολίας

Μέσω της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μπορούν να ερμηνευτούν πολλά φαινόμενα και νόμοι στη Φυσική. Έχει παρατηρηθεί ότι το εύρος της περιοχής των συχνοτήτων της είναι αρκετά μεγάλο. Πιο συγκεκριμένα το φάσμα της ακτινοβολίας φτάνει μέχρι το μέγεθος των είκοσι τάξεων, όπως διακρίνουμε στο παρακάτω Σχήμα 2.1. Σε αυτό το συνολικό φάσμα, η περιοχή του ορατού φάσματος αποτελεί ένα μικρό μέρος. Επίσης, η συχνότητα ή ισοδύναμα το μήκος κύματος καθορίζουν τις πηγές που εκπέμπουν μόνο σε μία συχνότητα(μονοχρωματικές πηγές). Τα φαινόμενα που έχουν σχέση με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία όπως τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, αποτελούνται από ένα ολόκληρο φάσμα συχνοτήτων, για την περιγραφή των οποίων, απαιτείται συγκεκριμένη διάταξη. Τα οπτικά φάσματα διακρίνονται σε συνεχή και γραμμικά(διακριτά). Στα συνεχή φάσματα ανήκουν οι συχνότητες που βρίσκονται σε ένα πεπερασμένο διάστημα, ενώ αντίθετως στα γραμμικά φάσματα ανήκουν μόνο συγκεκριμένες συχνότητες. Για να περιγράψουμε ένα φάσμα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα της έντασης συναρτήσει της συχνότητας ή του μήκους κύματος για ένα διακριτό φάσμα ή της συνάρτησης φασματικής κατανομής για ένα συνεχές φάσμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2 [Atkins et al., 2014] .

2.2 Θερμική ακτινοβολία

Διακρίνουμε τα περισσότερα αντικείμενα από το φως που αντανακλάται από αυτά. Σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες, ωστόσο, τα σώματα γίνονται αυτόφωτα και μπορούμε να τα δούμε να λάμπουν στο σκοτάδι. Τα νήματα λαμπτήρων πυρακτώσεως και οι φωτιές είναι γνωστά παραδείγματα. Αν και βλέπουμε τέτοια αντικείμενα από το ορατό φως που εκπέμπουν, δεν χρειάζεται να παραμείνουμε πολύ κοντά σε μια φωτιά για να πιστέψουμε ότι εκπέμπει επίσης άφθονα στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος. Είναι περίεργο γεγονός ότι η κβαντική φυσική, η οποία κυριαρχεί στη σύγχρονη άποψη μας για τον κόσμο γύρω μας, προέκυψε από τη μελέτη υπό ελεγχόμενων εργαστηριακών συνθηκών των ακτινοβολιών που εκπέμπονται από θερμά αντικείμενα.

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από ένα θερμό (δηλαδή $T > 0 \text{ K}$) σώμα λόγω της θερμοκρασίας του, ονομάζεται θερμική ακτινοβολία. Σχεδόν όλα τα σώματα που



Σχήμα 2.1. Φάσμα ακτινοβολίας εξαρτώμενο από το μήκος κύματος και τη συχνότητα.

Πηγή: [Voices, 2022]

είναι θερμά εκπέμπουν προς το περιβάλλον τους μία θερμική ακτινοβολία, εξαιτίας της θερμικής κίνησης των φορτισμένων σωματιδίων τους. Όμως ταυτόχρονα απορροφούν και ανακλούν θερμική ακτινοβολία από το περιβάλλον. Όταν ένα σώμα το οποίο στην αρχή είναι θερμότερο από το περιβάλλον του τείνει να ψύχεται αργά, παρόλο που δεν ανταλλάσσει με το περιβάλλον θερμότητα μέσω άλλων τρόπων (αγωγή, μεταφορά), διότι ο ρυθμός που εκπέμπει ενέργεια μέσω της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι πιο μεγάλος από τον ρυθμό που απορροφά ενέργεια. Εφόσον στο τέλος έχει πραγματοποιηθεί με επιτυχία θερμική ισορροπία ο ρυθμός εκπομπής και ο ρυθμός απορρόφησης θα είναι ίσοι. Αντιλαμβανόμαστε ωστόσο ότι η ακτινοβολία που προέρχεται από την επιφάνεια ενός σώματος (σε κάποια μη μηδενική θερμοκρασία) θα είναι μία ένωση εκπεμπόμενης και ανακλώμενης ακτινοβολίας. Αν θέλουμε να εξετάσουμε συγκεκριμένα την εκπεμπόμενη θερμική ακτινοβολία είναι απαραίτητο να εφεύρουμε ή να σκεφτούμε ένα ιδανικό σώμα για το οποίο δεν θα υπάρχει καθόλου ανακλώμενη ακτινοβολία, δηλαδή θα απορροφά όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει στην επιφάνειά του. Ένα τέτοιο ιδανικό σώμα είναι το μέλαν σώμα [Salasnich, 2017].

2.3 Φάσμα θερμικής ακτινοβολίας

Το φάσμα της θερμικής ακτινοβολίας από ένα θερμό στερεό σώμα είναι συνεχές και οι λεπτομέρειες του εξαρτώνται από τη θερμοκρασία. Αν ανεβάζουμε σταθερά τη θερμοκρασία ενός τέτοιου σώματος, θα παρατηρήσουμε δυο πράγματα: όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο περισσότερη θερμική ακτινοβολία εκπέμπεται και στην αρχή το σώμα φαίνεται αμυδρά, ενώ μετά λάμπει έντονα. Επίσης όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο μικρότερο είναι το μήκος κύματος αυτού του τμήματος του φάσματος που ακτινοβολεί πιο έντονα. Έτσι το κυρίαρχο χρώμα του θερμού σώματος, μετατοπίζεται από το θαμπό κόκκινο ως το έντονο κίτρινο – πορτοκαλί σε γαλαζωπή "λευκή θερμότητα". Δεδομένου ότι τα χαρακτηριστικά του φάσματος, εξαρτώνται από τη θερμοκρασία, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία ενός θερμού σώματος όπως ένα αστέρι, από την ακτινοβολία που εκπέμπει. Το μάτι βλέπει κυρίως το χρώμα που αντιστοιχεί στην πιο έντονη εκπομπή, στο ορατό εύρος. Η ακτινοβολία η οποία εκπέμπεται από ένα θερμό σώμα δεν εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία, αλλά και από το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το σώμα, το σχήμα του και την φύση της επιφάνειάς του. Σε κάθε περίπτωση ο ρυθμός αυξάνεται εάν η επιφάνεια είναι τραχιά. [Salasnich, 2014]

2.4 Εκπομπή και απορρόφηση ακτινοβολίας

Όπως έχουμε αναφέρει, κάθε σώμα σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από το απόλυτο μηδέν εκπέμπει θερμική ακτινοβολία. Στην κλασική θεωρία, αυτό μπορεί να εμφανιστεί σαν αποτέλεσμα των επιταχύνσεων ηλεκτρικών φορτίων κοντά στην επιφάνεια, που οφείλονται σε θερμική αναταραχή. Τώρα σε μια μοναδική επιτάχυνση, που διαρκεί ορισμένη χρονική περίοδο, το πλείστον της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας έχει συχνότητα κατά προσέγγιση ίση προς το αντίστροφο της περιόδου και μήκος κύματος ίσο προς το γινόμενο της c επί την περίοδο. Αλλά στις πολλές διαφορετικές διαδικασίες επιτάχυνσης, που προκαλούν τη θερμική ακτινοβολία, εκπέμπεται ένα ολόκληρο φάσμα μηκών κύματος. Στη βάση αυτής της απεικόνισης θα ήταν αναμενόμενο ότι ο ρυθμός της εκπομπής ενέργειας, όταν ολοκληρωθεί πάνω σε ολόκληρο το φάσμα μηκών κύματος, θα αυξάνει με την άνοδο της θερμοκρασίας της επιφάνειας, λόγω της αυξημένης θερμικής αναταραχής, και θα ήταν ανάλογος προς το εμβαδόν της επιφάνειας. Έτσι βρέθηκε να ισχύει μια εμπειρική εξίσωση

που οφείλεται στον Stefan (1879) και εκφράζεται ως:

$$I_T = \sigma \varepsilon T^4 . \quad (2.1)$$

Η ποσότητα I_T είναι η συνολική εκπεμπόμενη ενέργεια σε όλες τις συχνότητες ανά δευτερόλεπτο και ανά cm^2 από μια επιφάνεια σε απόλυτη θερμοκρασία T . Το ε είναι μια σταθερά που ονομάζεται ικανότητα εκπομπής, κυμαίνεται από 0 ως 1 και εξαρτάται από τη φύση της εκπέμπουσας επιφάνειας. Το $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ είναι η σταθερά Stefan – Boltzmann. Η εκπεμπόμενη ως θερμική ακτινοβολία ενέργεια προέρχεται από την ενέργεια της θερμικής αναταραχής. Στη διαδικασία απορρόφησης της θερμικής ακτινοβολίας από μια επιφάνεια, αποσπάται ενέργεια από την προσπίπτουσα θερμική ακτινοβολία, διαμέσου της επίδρασης της με ηλεκτρικά φορτία, και τελικά μετατρέπεται σε ενέργεια θερμικής αναταραχής. Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα σχέση ανάμεσα στην ικανότητα μιας επιφάνειας ως εκπομπού θερμικής ακτινοβολίας, όπως μετριέται από την ε , και την ικανότητα της ως απορροφητή. Η τελευταία ιδιότητα μετριέται με μια σταθερά, που ονομάζεται απορροφητικότητα α και ορίζεται ως ο λόγος της ολικής θερμικής ενέργειας, που απορροφάται από την επιφάνεια, προς την ολική θερμική ενέργεια, που προσπίπτει σε αυτή. Η σχέση ανάμεσα στα μεγέθη ε και α , είναι ένα θεώρημα που οφείλεται στον Kirchhoff και είναι απλά [Eisberg, 1995]

$$\varepsilon = \alpha . \quad (2.2)$$

Αυτό αποδείχθηκε με ένα θερμοδυναμικό επιχείρημα για τις διαδικασίες εκπομπής και απορρόφησης, θεωρώντας τη θερμική ισορροπία επιφανειών διαφορετικής φύσης, που ανταλλάσσουν θερμική ενέργεια με εκπομπή και απορρόφηση.

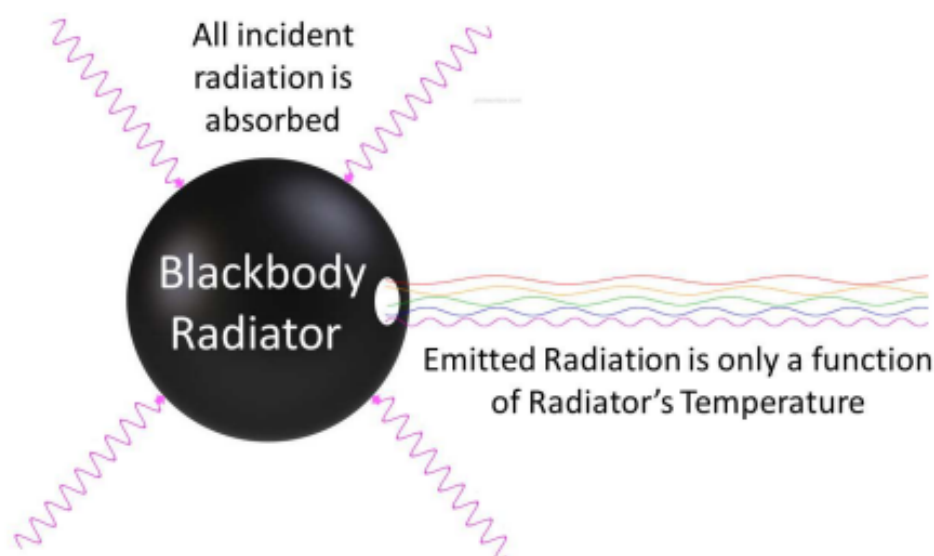
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέλαν Σώμα

Αυτό το κεφάλαιο στην ουσία είναι το πρώτο που εμφανίζεται η Κβαντική άποψη μετά από μια αναλυτική περιγραφή του προβλήματος σύμφωνα με την Κλασική Φυσική. Θα αναφερθούμε στους λόγους που απέτυχε η Κλασική ερμηνεία και οδηγηθήκαμε στην Κβαντική υπόθεση του Planck. Πιο συγκεκριμένα: Παρουσιάζουμε αρχικά την έννοια του μέλανος σώματος. Στην επόμενη ενότητα περιγράφουμε τη διαδικασία που εκπέμπει και απορροφά ένα μέλαν σώμα την θερμική ακτινοβολία και ποια είναι η σχέση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας με την θερμοκρασία του σώματος. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε το πρότυπο ενός μέλαν σώματος έτσι ώστε να προσεγγίσουμε την ακτινοβολία αυτού και τέλος παρουσιάζουμε την ισχύ ακτινοβολίας καθώς και την πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με τις απαραίτητες εξισώσεις.

3.1 Μέλαν σώμα

Με τον όρο μέλαν σώμα εννοούμε κάθε σώμα που απορροφά πλήρως όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει στην επιφάνεια του ανεξάρτητα από την συχνότητά της, δηλαδή για τη σταθερά απορροφητικότητας ισχύει ότι $\alpha = 1$. Ένα τέτοιο σώμα φαίνεται σίγουρα μαύρο. Στην πραγματικότητα, ένα σώμα δείχνει για παράδειγμα κόκκινο αν, από το φως που προσπίπτει επάνω του, αντανakλά τις συχνότητες που αναλογούν στο κόκκινο χρώμα και όλες τις υπόλοιπες τις απορροφά. Όμως αν αυτό το σώμα απορροφά όλες τις συχνότητες χωρίς να αντανakλά καμία, δεν βλέπουμε ακτινοβολία που προέρχεται από αυτό το σώμα, άρα το σώμα προκαλεί την ίδια οπτική αντίληψη που προκαλεί η έλλειψη φωτός. Επομένως το σώμα έχει το ίδιο "χρώμα" με το σκοτάδι, δηλαδή μαύρο. Παρόλο που παρομοιάζουμε το μέλαν σώμα λόγω του ποσοστού της ακτινοβολίας που απορροφά (100 %), αυτό που στην πραγματικότητα μας προβληματίζει είναι η ακτινοβολία που εκπέμπει, ενώ δεν σχετίζεται με την προσπίπτουσα ακτινοβολία και τα χαρακτηριστικά της οποίας εξαρτώνται μόνο από την θερμοκρασία του μέλανος σώματος (θερμική ακτινοβολία). Σε συνηθισμένες θερμοκρασίες, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε προσπίπτουσα ακτινοβολία (η οποία απορροφάται και δεν ανακλάται) η ακτινοβολία που εκπέμπεται εμπίπτει στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος και δεν είναι ευδιάκριτη από τον ανθρώπινο μάτι. Άρα το μέλαν σώμα παραμένει μαύρο. Όπως έχουμε αναφέρει, τα υλικά σώματα όταν βρίσκονται σε κατάσταση συμπίεσης (στερεά και υγρά) εκπέμπουν από την επιφάνειά τους ένα συνεχές φάσμα θερμικής ακτινοβολίας. Η μορφή του φάσματος αυτού εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία και δεν εξαρτάται σχεδόν καθόλου από το πως είναι φτιαγμένο αυτό το υλικό και η επιφάνεια του. Τα μαύρα σώματα στην πραγματικότητα, για παράδειγμα, απορροφούν μεγάλη ποσότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και συγκροτούν πολύ καλές προσεγγίσεις για ένα ιδανικό "μέλαν σώμα". Επίσης, η είσοδος μιας θερμής κοιλότητας μπορεί να αποτελέσει ακόμη καλύτερη προσέγγιση μέλανος σώματος 3.1. Παρατηρούμε ότι το μαύρο αυτό σώμα λειτουργεί ως τέλειος απορροφητής και εκπομπός. Η ακτινοβολία που εισέρχεται από την οπή εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία [McGee, 1988] .

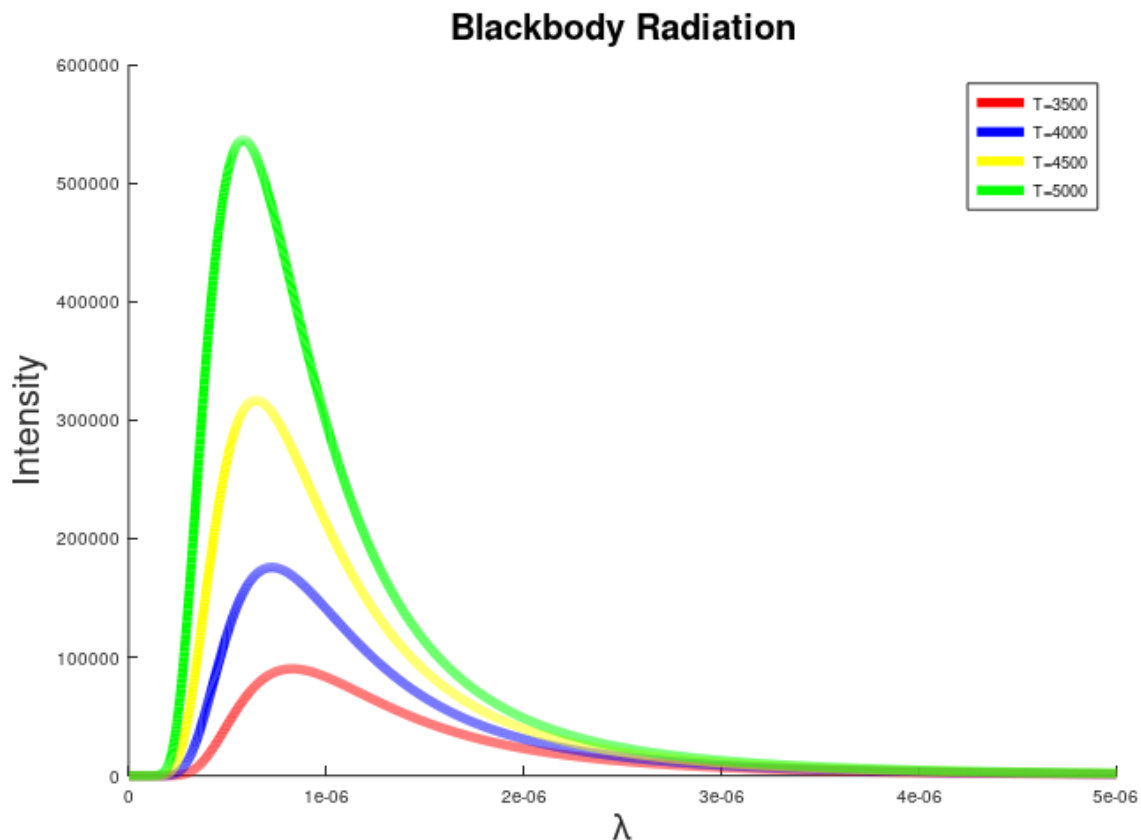


Σχήμα 3.1. Blackbody Radiator. Είναι κάθε αντικείμενο που εκπέμπει και απορροφά τέλεια την ακτινοβολία.

3.2 Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Μέχρι τη δεκαετία του 1980, οι πειραματικές τεχνικές είχαν βελτιωθεί αρκετά ώστε ήταν δυνατό να γίνουν αρκετά ακριβείς μετρήσεις της κατανομής ενέργειας σε αυτή την ακτινοβολία κοιλότητας, ή όπως θα την ονομάσουμε, ακτινοβολία μέλανος σώματος. Ένας αριθμός αντικειμένων στη φύση αποτελούν αρκετά καλές προσεγγίσεις ενός μέλανος σώματος. Ένα παράδειγμα θα ήταν κάθε αντικείμενο καλυμμένο με διάχυτο στρώμα μαύρου χρώματος. Αφού η απορροφητικότητα του μέλανος σώματος είναι ίση προς τη μονάδα, έπεται από το νόμο του Kirchhoff ότι η ικανότητα εκπομπής του είναι επίσης μονάδα. Ένα μέλαν σώμα, που είναι ο πιο ικανός απορροφητής, είναι επίσης ο ικανότερος εκπομπός. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $\varepsilon = 1$ στην εξίσωση (2.2), βλέπουμε ότι η ισχύς ακτινοβολίας, που εκπέμπεται ανά cm^2 είναι η ίδια για όλα τα μελανά σώματα που βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία. Αυτό αποδεικνύει έντονα ότι και οι άλλες ιδιότητες της εκπεμπόμενης από μελανά σώματα θερμικής ακτινοβολίας, όπως η φασματική κατανομή της ακτινοβολίας, εξαρτώνται επίσης αποκλειστικά από την θερμοκρασία του μέλανος σώματος αλλά όχι από τη λεπτομερή φύση του. Μπορεί να αποδειχθεί με θερμοδυναμικά επιχειρήματα, που αφορούν σε δυο μελανά σώματα σε ισορροπία, ότι πράγματι αυτό συμβαίνει. Η φασματική κατανομή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος προσδιορίζεται από την ποσότητα

$I_T(\lambda)$, η οποία ορίζεται έτσι ώστε η $I_T(\lambda)d\lambda$ να ισούται προς την ενέργεια που εκπέμπεται ανά δευτερόλεπτο, από ακτινοβολία με μήκος κύματος στο διάστημα λ ως $\lambda + d\lambda$, από 1cm^2 επιφάνειας θερμοκρασίας T . Οι πρώτες μετρήσεις έγιναν από τους Lummer και Pringsheim (1897) [Lummer and Pringsheim, 1897]. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν με ένα όργανο όμοιο με τα πρισματικά φασματόμετρα.



Σχήμα 3.2. Ακτινοβολία μέλανος σώματος.

Η παρατηρούμενη εξάρτηση της $I_T(\lambda)$, από τα λ και T απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2. Το βέλος στην τετμημένη, δηλώνει το μήκος κύματος, στο οποίο ο οφθαλμός παρουσιάζει τη μέγιστη ανταπόκρισή του (πράσινο φως). Βλέπουμε ότι, για κάθε δοσμένο λ , η $I_T(\lambda)$ αυξάνει με την T . Το ολοκλήρωμα αυτό, που είναι ίσο προς το εμβαδόν κάτω από τις καμπύλες, αυξάνει με την τέταρτη δύναμη της T , σε συμφωνία με την εξίσωση (2.1). Το Σχήμα 3.2, δείχνει επίσης ότι το φάσμα μετατοπίζεται προς μικρότερα μήκη κύματος καθώς η T αυξάνει. Μια ποσοτική εξέταση του Σχήματος 3.2 θα δείξει ότι η ισχύ της εξίσωσης

$$\lambda_{max} \propto \frac{1}{T}, \quad (3.1)$$

όπου λ_{max} είναι το μήκος κύματος λ , στο οποίο η $I_T(\lambda)$ μεγιστοποιείται για μια συγκεκριμένη Θερμοκρασία T .

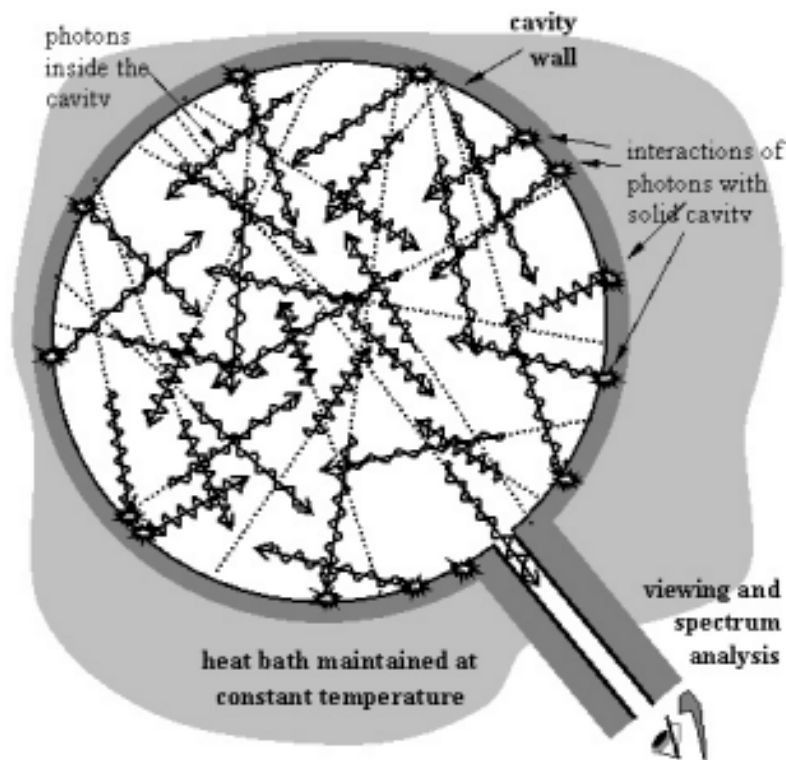
3.3 Ένα πρότυπο μέλανος σώματος

Το ερώτημα που τώρα δημιουργείται, είναι "πού βρίσκουμε μελανά σώματα" ή, γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν τέτοια σώματα, πως φτιάχνουμε τέτοιες συσκευές που προσεγγίζουν με ικανοποιητικό τρόπο το μέλαν σώμα. Πέρα από τα διάπυρα αυτόφωτα σώματα που ήδη αναφέραμε, μία αξιόλογη προσέγγιση μέλανος σώματος μπορούμε να πάρουμε από ένα αντικείμενο αν καλύψουμε την επιφάνεια του με ένα στρώμα μαύρης μπογιάς. Ένα τέτοιο σώμα απορροφά σχεδόν όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει στην επιφάνειά του, για το λόγο αυτό και δείχνει μαύρο. Βάση αυτού έχει προέλθει και ο όρος μέλαν (μαύρο) σώμα. Ένας τρόπος κατασκευής μέλανος σώματος, ο οποίος είναι πολύ σημαντικός και σπουδαίος, επειδή χρησιμοποιείται ως βάση για τους θεωρητικούς υπολογισμούς φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Βέβαια το ότι χρησιμοποιούμε μια "εξιδανικευμένη" κατασκευή για να περιγράψουμε ένα μέλαν σώμα δεν πρέπει να μας ξενίζει αφού η ιδέα του μέλανος σώματος είναι από μόνη της μια εξιδανίκευση. Το ιδανικό πρότυπο μέλανος σώματος που φαίνεται στο Σχήμα 3.3, δημιουργείται θεωρώντας μία κοιλότητα σ' ένα σώμα όπου συνδέεται με την εξωτερική επιφάνεια του σώματος με μία μικρή οπή. Η ακτινοβολία που εισέρχεται από την οπή δέχεται αρκετές διαδοχικές ανακλάσεις στα εσωτερικά τοιχώματα της κοιλότητας και, σε κάθε ανάκλαση, δέχεται μερική απορρόφηση. Η περίπτωση να ξαναβρεί η ακτινοβολία την είσοδο και να ξαναβγεί από την κοιλότητα μετά από κάποιο μερικές ανακλάσεων ώσπου μπορεί να μην έχει απορροφηθεί πλήρως, είναι ασήμαντη. Το πρότυπο μέλανος σώματος του Σχήματος 3.3 έχει δυο πλεονεκτήματα να είναι αρκετά χρήσιμο και στη θεωρία αλλά και στην πράξη.

Το πειραματικό πλεονέκτημα είναι ο εύκολος τρόπος με τον οποίο μπορεί να κατασκευασθεί, χρησιμοποιώντας μία κοιλότητα σε ένα θερμαινόμενο σώμα μέσω μίας οπής "επικοινωνίας" στο εξωτερικό. Η ακτινοβολία η οποία εκπέμπεται από την οπή είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος, και το φάσμα της, όπως αυτό του Σχήματος 3.2 μπορεί με ευκολία να μετρηθεί. Από θεωρητική σκοπιά είναι αρκετά βολικό να μελετηθεί η ακτινοβολία με βάση το πρότυπο του Σχήματος 3.3, επειδή μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολύ γενικά θεω-

ρητικά επιχειρήματα βασισμένα στην θερμοδυναμική ισορροπία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με τα τοιχώματα της κοιλότητας. Προφανώς η ακτινοβολία στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι της ίδιας λογικής με την ακτινοβολία που βγαίνει από την οπή. Δηλαδή είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος, αφού η οπή αφήνει να βγαίνει μόνο η εκπεμπόμενη ακτινοβολία, ενώ η προσπίπτουσα απορροφάται πλήρως. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι ενώ οι πειραματικές μετρήσεις αφορούν την φασματική κατανομή της ακτινοβολίας $I_{T(\lambda)}$ που εξέρχεται από την οπή, οι θεωρητικοί υπολογισμοί βασίζονται στην ισορροπία της ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα. Μια ποσότητα που χαρακτηρίζει την ακτινοβολία μέσα στην κοιλότητα, είναι η πυκνότητα ενέργειας ε :

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{V} \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.3. Ένα πρότυπο μέλανος σώματος το οποίο αποτελείται από μία κοιλότητα στο εσωτερικό ενός σώματος. Η ακτινοβολία που εισέρχεται από τη μικρή οπή παγιδεύεται και απορροφάται πλήρως.

Αυτή η ποσότητα, που είναι σταθερή σ' όλο τον όγκο της κοιλότητας και δεν αλλάζει ούτε με τη θέση ούτε με τη διεύθυνση (ισοτροπική ιδιότητα) είναι κατάλληλη για την θεωρητική

περιγραφή της ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα. Εάν ορίσουμε $\Delta\varepsilon$ το μέρος εκείνο της πυκνότητας ενέργειας που οφείλεται σε ακτινοβολία με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + \Delta\nu$, τότε η στοιχειώδης πυκνότητα ενέργειας $\Delta\varepsilon$ είναι ανάλογη προς την περιοχή $\Delta\nu$:

$$\Delta\varepsilon = u(\nu, T)\Delta\nu \quad (3.3)$$

Η φυσική ποσότητα $u(\nu, T)$ ονομάζεται συνάρτηση φασματικής πυκνότητας. Από την (3.3) βλέπουμε πως η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ισούται με :

$$u(\nu, T) = \frac{\Delta E}{\Delta\nu} \quad (3.4)$$

$$u(\nu, T) = \frac{1}{V} \frac{\Delta E}{\Delta\nu} \quad (3.5)$$

Στο όριο των απειροστά μικρών μεταβολών μπορούμε, με κάποια μαθηματική ελαφρότητα που είναι συνηθισμένο σε τέτοιες περιπτώσεις, να χρησιμοποιήσουμε αντί για τα μεγέθη ΔE και $\Delta\nu$ τις διαφορικές μεταβολές dE και $d\nu$ αντίστοιχα και να γράψουμε:

$$u(\nu, T) = \frac{1}{V} \frac{dE}{d\nu} \quad (3.6)$$

Επομένως από τις σχέσεις (3.4), (3.5), (3.6) φαίνεται ότι η φασματική πυκνότητα μπορεί να υπολογισθεί σαν παράγωγος ως προς ν της ενέργειας, διαιρεμένη με τον όγκο V ή σαν παράγωγος της πυκνότητας ενέργειας ε . Οι συναρτήσεις κατανομής $I_T(\nu)$ και $u(\nu, T)$ είναι ανάλογες, αλλά η $u(\nu, T)$ είναι πιο εύκολο να υπολογισθεί και έτσι είναι πιο βολική για την θεωρητική περιγραφή της ακτινοβολίας. Η καμπύλη που δίνει το $u(\nu, T)$ ως συνάρτηση του ν για μια κοιλότητα της οποίας τα τοιχώματα βρίσκονται σε θερμοκρασία T , έχει την ίδια μορφή με την καμπύλη που δίνει το $I_T(\nu)$ συνάρτησε του ν για ένα μέλαν σώμα της ίδιας θερμοκρασίας T . Η κοινή μορφή και των δύο καμπυλών εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία. Η μορφή της συνάρτησης $u(\nu, T)$ μπορεί να βρεθεί με πολύ γενικά επιχειρήματα, αρκεί να υπάρχει μία βασική κατανόηση του φαινομένου, η οποία στηρίζεται στη θερμοδυναμική ισορροπία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα με την ύλη (τα υλικά σώματα) των τοιχωμάτων. Τα τοιχώματα της κοιλότητας εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική (θερμική) ακτινοβολία λόγω της θερμικής κινήσεως των φορτισμένων δομικών τους λίθων (μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια, κ.λ.π.). Με τη σειρά του το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που είναι "εγκλωβισμένο" μέσα στην κοιλότητα, ασκεί ηλεκτρικές

δυνάμεις πάνω στους φορτισμένους δομικούς λίθους των τοιχωμάτων και μεταβάλλει την κινητική τους κατάσταση. Στην κατάσταση της θερμοδυναμικής ισορροπίας η ενέργεια που ανταλλάσσεται με τις δύο αυτές διαδικασίες εξισορροπείται. Ο κλασικός θεωρητικός προσδιορισμός της φασματικής πυκνότητας, ο οποίος σημειωτέον, δεν απαιτεί λεπτομερή μελέτη της κινήσεως των φορτισμένων σωματιδίων εντός των τοιχωμάτων αλλά βασίζεται σε γενικά θερμοδυναμικά επιχειρήματα, οφείλεται στους Rayleigh και Jeans.

3.4 Ισχύς ακτινοβολίας μέλανος σώματος

Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, ο Max Planck ανέπτυξε την θεωρία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, κατά την οποία υποτίθεται ότι η ενέργεια μεταφέρεται υπό μορφήν διακριτών φωτονίων. Βασισμένος σε αρχές της Κβαντικής Φυσικής, ο Planck απέδειξε ότι η ενέργεια που εκπέμπεται υπό μορφήν ακτινοβολίας στο κενό από ένα μέλαν σώμα, σχετίζεται με την απόλυτη θερμοκρασία T του σώματος και το μήκος κύματος λ (ή την συχνότητα εκπομπής), σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1 \right)} \quad (3.7)$$

όπου:

- c η ταχύτητα του φωτός
- h η σταθερά του Planck
- T η απόλυτη θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin
- k η σταθερά του Boltzmann
- λ μήκος κύματος σε μm

Η σχέση (3.7) απλοποιείται περαιτέρω και γράφεται ως εξής:

$$E(T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)} \quad (3.8)$$

όπου θέσαμε:

$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3.743 \times 10^8 \quad W \cdot \mu m^4 / m^2$$

$$c_2 = hc/k = 1.439 \times 10^4 \quad \mu m \cdot K$$

Η ποσότητα $E(\lambda, T)$ ονομάζεται η φασματική πυκνότητα εκπεμπόμενης ισχύος μέλανος σώματος και αποτελεί την ποσότητα ενέργειας που ακτινοβολείται από ένα μέλαν σώμα σε απόλυτη T , ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα μήκους κύματος, με μήκος κύματος λ .

3.5 Ενέργεια ακτινοβολίας μέλανος σώματος

Η πυκνότητα ενέργειας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $u(\nu, T)d\nu$, αποτέλεσε ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε την κβάντωση της ΗΜ ακτινοβολίας. Παρουσιάζουμε παρακάτω τρεις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν με σκοπό να εξηγηθεί η πειραματική συμπεριφορά, συγκεκριμένα: την έκφραση Rayleigh-Jeans (κλασική φυσική, 1900), την έκφραση Wien (πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες, 1896) και εν τέλει την έκφραση Planck (παλαιά κβαντική μηχανική, 1900) η οποία ταυτίζεται με την πειραματική συμπεριφορά σε όλη την περιοχή συχνοτήτων. [Σιμσερίδης, 2015]

Έχουμε λοιπόν το νόμο Rayleigh-Jeans (κλασική φυσική, 1900)

$$u_{RJ}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} \quad (3.9)$$

Το νόμο Wien (πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες, 1896)

$$u_W(\nu, T) = \frac{\alpha\nu^3}{\exp\left(\frac{b\nu}{T}\right)} \quad (3.10)$$

από τις σταθερές του νόμου του Planck η σχέση (3.10) γίνεται:

$$u_W(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} \quad (3.11)$$

Τέλος, παραθέτουμε το νόμο Planck (παλαιά κβαντική μηχανική, 1900) που ταυτίζεται με τα πειραματικά δεδομένα για οποιαδήποτε συχνότητα.

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.12)$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T x}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T dx}{h}, \quad (3.13)$$

τότε εμφανίζεται η ουσιαστική διαφοροποίηση των παραπάνω νόμων, αφού εκφράζονται με τις παρακάτω μορφές:

$$u_{RJ} = u_0 x^2 \quad (3.14)$$

$$u_W = u_0 \frac{x^3}{\exp(x)} \quad (3.15)$$

$$u = u_0 \frac{x^3}{\exp(x) - 1} \quad (3.16)$$

όπου το μέγεθος u_0 δίνεται από την σχέση:

$$u_0 = \frac{8\pi}{h^2} \cdot \left(\frac{k_B T}{c} \right). \quad (3.17)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Απόπειρα κλασικής ερμηνείας

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί γίνεται η πρώτη απόπειρα προσέγγισης της ακτινοβολίας μέλανος σώματος από τον νόμο των Rayleigh–Jeans και στον τρόπο που οδηγήθηκε στην υπεριώδη καταστροφή, επομένως στην αποτυχία. Πιο συγκεκριμένα γίνεται μελέτη των ταλαντευόμενων ηλεκτρονίων που παράγουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μέσα στην κυβική κοιλότητα. Γίνεται πλήρης περιγραφή του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο και χρόνο, χρησιμοποιώντας την τρισδιάστατη εξίσωση κύματος. Τέλος γίνεται μια ακόμη προσπάθεια απόδειξης, περικλύοντας την ακτινοβολία σε μια κυβική κοιλότητα, εξετάζοντας την συμπεριφορά των τεσσάρων πρώτων πιθανών καταστάσεων για το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο τοιχωμάτων.

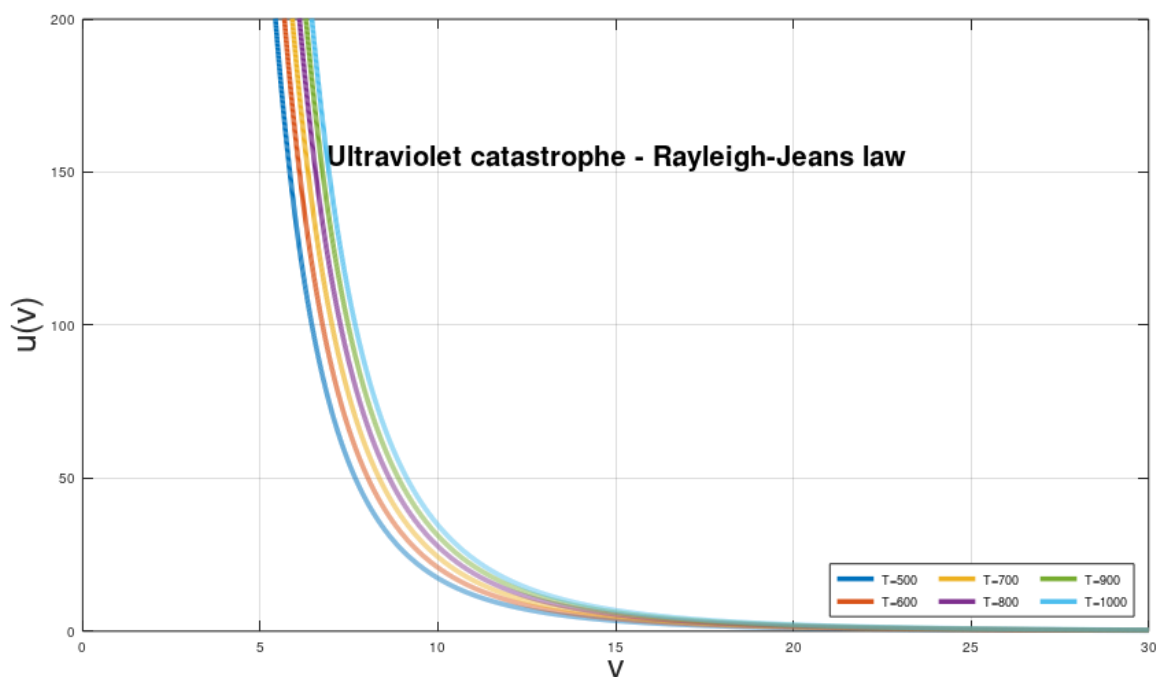
4.1 Η υπεριώδης καταστροφή

Σύμφωνα με τον Λόρδο Rayleigh το 1900 και στη συνέχεια πιο αυστηρά από τον Rayleigh, τον Sir James Jeans που συνεργάστηκαν το 1905, βρήκαν ότι ο νόμος της ακτινοβολίας μέλανος σώματος, προέβλεψε, ότι η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα μέλαν σώμα ως συνάρτηση της συχνότητας ποικίλλει ανάλογα με το τετράγωνο της συχνότητας της ακτινοβολίας. Το νόμο αυτό μαθηματικά μπορούμε να τον γράψουμε ως:

$$\varepsilon(\omega) \propto \omega^2$$

ή χρησιμοποιώντας μια εναλλακτική ονοματολογία,

$$u(\nu) \propto \nu^2$$



Σχήμα 4.1. Οι καμπύλες αυτές είναι η πρόβλεψη του νόμου των Rayleigh-Jeans για έξι θερμοκρασίες και δείχνουν αυτό που ονομάζεται με τον (ίσως) ατυχή όρο "Υπεριώδης Καταστροφή" (Ultraviolet Catastrophe).

Αυτός ο νόμος οδήγησε σε αυτό που έγινε γνωστό ως "υπεριώδης καταστροφή". Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Η ενεργειακή πυκνότητα είναι ανάλογη με την συχνότητα. Με άλλα λόγια όσο αυξάνεται η συχνότητα, αυξάνεται και η ενέργεια και έτσι αποκλίνει προς το άπειρο. Καθώς η συχνότητα τείνει στο μηδέν έχουμε μεγάλο σφάλμα στην Κλασική

Θεωρία της Φυσικής. Στην προσπάθεια επίλυσης αυτού του παραλογισμού, το 1900 ο Max Planck σκέφτηκε την ιδέα της κβαντοποίησης της ενέργειας, η οποία ήταν το πρώτο βήμα σε αυτό που αργότερα θα γινόταν κβαντική μηχανική, μια εντελώς νέα περιγραφή του υποατομικού κόσμου. Προκειμένου να κατανοήσουμε σωστά τι έκανε ο Max Planck, πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε σωστά τι έκαναν οι Rayleigh-Jeans, χρησιμοποιώντας την κλασική φυσική. [Evans, 2013a]

4.2 Προσέγγιση του νόμου των Rayleigh-Jeans

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα μέλαν σώμα αποτελείται από ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε θερμική ισορροπία με τα τοιχώματα της κοιλότητας. Όταν βρίσκονται σε θερμική ισορροπία, ο μέσος ρυθμός εκπομπής της ακτινοβολίας ισούται με το μέσο ρυθμό απορρόφησης της. Η θεωρία των Rayleigh-Jeans βασίστηκε στην ιδέα ότι, όταν τα τοιχώματα ενός αντικειμένου βρίσκονται σε θερμική ισορροπία, η θερμοκρασία των τοιχωμάτων είναι ίση με τη "θερμοκρασία" της ακτινοβολίας. Θεωρούμε ότι τα τοιχώματα μιας κοιλότητας αποτελούνται από φορτισμένα σωματίδια συζευγμένα με μια λειτουργία στάσιμου κύματος ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αυτό φαίνεται από την θεωρία του Maxwell για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπου δηλώνει ότι ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο ακτινοβολεί ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Να σημειωθεί ότι η συχνότητα του ταλαντούμενου φορτίου είναι ίση με την συχνότητα του συζευγμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Επομένως, είναι ασφαλές να πούμε ότι στη θερμική ισορροπία, η μέση ενέργεια του ταλαντούμενου φορτίου είναι ίση με τη μέση ενέργεια του συζευγμένου τρόπου στάσιμου κύματος αυτού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τώρα μπορούμε να δούμε ότι το ταλαντούμενο σωματίδιο, σε θερμική ισορροπία έχει μέση ενέργεια

$$\overline{E} = k_B T \quad (4.1)$$

Ως εκ τούτου, η ενέργεια του κύματος θεωρείται επίσης $k_B T$ και μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει θερμοκρασία T . Αυτό αποτελεί την βάση της θεωρίας των Rayleigh-Jeans. [Zemansky, 2011], [Bowley and Sanchez, 1999]

Θα εξετάσουμε, συγκεκριμένα, τα ταλαντευόμενα ηλεκτρόνια που παράγουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (φως). Ας υποθέσουμε ότι αυτά τα ταλαντευόμενα ηλεκτρόνια

αναμειγνύονται με ένα πολύ λεπτό αέριο. Καθώς τα ηλεκτρόνια ακτινοβολούν μακριά, θα χάσουν ενέργεια, και έτσι καθώς θα επανέλθουν σε ισορροπία με τα μόρια του αερίου, θα το κάνουν με χαμηλότερη μέση ενέργεια, και επομένως χαμηλότερη θερμοκρασία. Αυτός είναι ο λόγος που ένας λαμπερός κλίβανος ψύχεται με την πάροδο του χρόνου, η ακτινοβολία αφαιρεί ενέργεια από το αέριο ή το στερεό που παράγει την ακτινοβολία. Αλλά, αν εγκλωβίσουμε την ακτινοβολία σε ένα κουτί με τέλεια ανακλαστικά τοιχώματα, η ακτινοβολία δεν έχει πού να πάει. Ως εκ τούτου, η ακτινοβολία και τα μόρια του αερίου θα έρθουν σε θερμική ισορροπία μεταξύ τους. Αυτό εννοείται με τον όρο ακτινοβολία μέλανος σώματος, είναι όταν η ακτινοβολία βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το αντικείμενο που παράγει την ακτινοβολία. Οι Rayleigh και Jeans χρησιμοποίησαν μια τέτοια εξιδανικευμένη κοιλότητα για να εξαγάγουν τον ομώνυμο νόμο τους. Εδώ θα περάσουμε από τα βήματα της παραγωγής τους, τα οποία θα οδηγήσουν στον νόμο που ήταν σαφώς λάθος.

Πρέπει να εφαρμόσουμε την τρισδιάστατη εξίσωση κύματος για το Ηλεκτρικό πεδίο σε μια κυβική κοιλότητα, με το μήκος κάθε πλευράς να είναι L . Το τρισδιάστατο ηλεκτρικό πεδίο είναι συνάρτηση των συντεταγμένων του χώρου (x, y, z) και του χρόνου t , οπότε μπορεί να γραφτεί ως

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) .$$

Όμως, για να κάνουμε τα πράγματα πιο απλά, θα ξεκινήσουμε εξετάζοντας ένα μονοδιάστατο κύμα που ταξιδεύει π.χ. την κατεύθυνση x . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$E(x, t) = E \sin(kx - \omega t) .$$

Το ω στην παραπάνω εξίσωση είναι η γωνιακή συχνότητα στο χρόνο του κύματος και σχετίζεται με τη κυκλική συχνότητα μέσω της εξίσωσης $\omega = 2\pi\nu$ όπου ν είναι η χρονική συχνότητα που μετράται σε Hertz. Το k στην παραπάνω εξίσωση ονομάζεται αριθμός κύματος (κυματάριθμος) και ορίζεται ως ο αριθμός των μηκών κύματος ανά μονάδα μήκους κύματος. Μπορούμε να το γράψουμε $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, όπου λ είναι το μήκος κύματος. Το μαγνητικό πεδίο μπορεί επίσης να γραφτεί με την μορφή

$$B(x, t) = B \sin(kx - \omega t) ,$$

αλλά σύμφωνα με τις εξισώσεις του Maxwell, $\frac{E}{B} = c$, η ταχύτητα του φωτός και έτσι το μαγνητικό στοιχείο είναι πολύ μικρότερο από το ηλεκτρικό στοιχείο [Evans, 2013a] .

4.3 Το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο και στο χρόνο

Θα χρησιμοποιήσουμε την κυματική εξίσωση, η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, που συσχετίζει τη χωρική μεταβολή του κύματος με τη χρονική μεταβλητή του. Για το ηλεκτρικό πεδίο, αν εξετάσουμε μόνο τη διάσταση x προς το παρόν, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_x}{dt^2} \quad (4.2)$$

$$E_x = E \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = Ek \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} = -Ek^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 E_x .$$

Για την χρονική συνιστώσα:

$$\frac{dE_x}{dt} = -\omega E \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{d^2 E_x}{dt^2} = -\omega^2 E \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 E_x$$

από την Εξίσωση (4.2) προκύπτει ότι,

$$-k^2 E_x = \frac{1}{c^2} (-\omega^2 E_x) \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} .$$

Όμως χρησιμοποιώντας τον κυματάρημο

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

και την κυκλική συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu ,$$

Μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \Rightarrow c^2 = \nu^2\lambda^2,$$

οπότε τελικά βρίσκουμε

$$c = \lambda\nu,$$

την πολύ γνωστή σχέση που είναι γνωστή ως Θεμελιώδης Νόμος της Κυματικής [Evans, 2013a].

4.4 Η τρισδιάστατη εξίσωση κύματος

Ξεκινάμε με το αξίωμα ότι η κατανομή ενέργειας της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος δεν εξαρτάται από το σχήμα της κοιλότητας (το οποίο μπορεί να αποδειχθεί πειραματικά). Για ευκολία στους υπολογισμούς, παίρνουμε το σχήμα της κοιλότητας ως κύβο. Υποθέτουμε επίσης ότι τα κύματα εξαφανίζονται στα τοιχώματα, ή με άλλα λόγια, δεν περνούν από αυτά. Πρέπει να υπολογιστεί ο αριθμός των στάσιμων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε έναν κύβο μήκους L .

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις μερικές παραγώγους καθώς πρέπει να διαφοροποιήσουμε την συνιστώσα x , y , z και την συνιστώσα του χρόνου για το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(x, y, z, t)$. Με ανάλογο τρόπο γράφουμε $\vec{E}(r, t) = E \sin(k \cdot \vec{r} - \Omega t)$. Η κατεύθυνση $\vec{r}$ του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να χωριστεί στις x , y , z συνιστώσες καθώς και ο κυματάρηθος k , έτσι ώστε

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

επομένως γράφουμε

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}(x, y, z, t) = E \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

[Evans, 2013b]

4.5 Ακτινοβολία σε κυβική κοιλότητα

Για την ακτινοβολία μέλανος σώματος πρέπει να περικλείουμε την ακτινοβολία σε μια κοιλότητα με τέλεια ανακλαστικά τοιχώματα, έτσι ώστε η ακτινοβολία και η ύλη να μπορούν να έρθουν σε θερμική ισορροπία μεταξύ τους χωρίς απώλεια ενέργειας. Για απλότητα, η κοιλότητα θα είναι ένας κύβος όπου κάθε πλευρά θα έχει μήκος L .

Θα ορίσουμε την κατακόρυφη κατεύθυνση ως την κατεύθυνση z , την κατεύθυνση προς τα δεξιά ως την κατεύθυνση y και την κατεύθυνση προς εμάς ως την κατεύθυνση x , όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4.2. Χρειαζόμαστε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδέν στα τοιχώματα, γιατί αν ήταν μη μηδενικό το ηλεκτρικό πεδίο θα προσέδιδε ενέργεια στα τοιχώματα της κοιλότητας και θα έχανε ενέργεια από μόνο του. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι μηδέν στα τοιχώματα, αυτό σημαίνει ότι οι x , y , z συνιστώσες του E_x , E_y και E_z θα πρέπει επίσης να είναι μηδέν στα τοιχώματα. Έτσι, μόνο ηλεκτρικά πεδία με κατάλληλα μήκη κύματος μπορούν να υπάρχουν στην κοιλότητα. Αυτό είναι ανάλογο με τα στάσιμα κύματα σε μια χορδή, αν έχουμε δύο σταθερά άκρα (όπως μια χορδή κιθάρας), μόνο ορισμένα μήκη κύματος μπορούν να υπάρχουν.

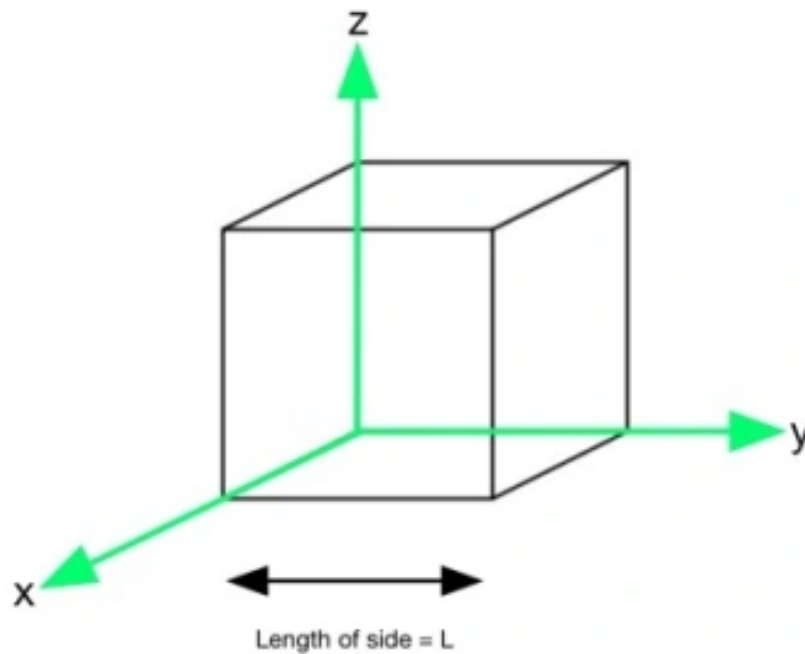
Στο παρακάτω διάγραμμα που δίνεται στο Σχήμα 4.3 φαίνονται τέσσερις πρώτες πιθανές καταστάσεις για το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δύο τοίχων σε απόσταση L μεταξύ τους [τα πρώτα τέσσερα με την έννοια ότι αυτή με τη χαμηλότερη συχνότητα (μεγαλύτερο μήκος κύματος) είναι η κόκκινη καμπύλη, και μετά η επόμενη, η χαμηλότερη συχνότητα είναι η μπλε καμπύλη, μετά η πράσινη και τέλος η μαύρη]. Στο παρακάτω γράφημα, ο άξονας x είναι σε μονάδες L , άρα το 1 αντιστοιχεί σε $L = 1$.

- Η κόκκινη καμπύλη είναι το κύμα χαμηλότερης συχνότητας (μεγαλύτερου μήκους κύματος) που μπορεί να υπάρξει μεταξύ των δύο τοιχωμάτων. Και πάλι, χρησιμοποιώντας την αναλογία των στάσιμων κυμάτων σε μια χορδή, αυτό θα ήταν το θεμελιώδες κύμα, η χαμηλότερη νότα που θα μπορούσε να παράγει η χορδή. Η εξίσωση που περιγράφει αυτήν την κόκκινη καμπύλη

$$y = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

αλλά μπορούμε επίσης να γράψουμε, για οποιοδήποτε κύμα,

$$y = \sin(kx)$$



Σχήμα 4.2. Κυβική κοιλότητα μήκους $L=1$.

- Αν το k στην κόκκινη καμπύλη είναι ίσο με

$$k = \frac{\pi}{L},$$

τότε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi L}{\pi} = 2L$$

τότε το μισό κύμα χωράει ανάμεσα στα δύο τοιχώματα.

- Για την μπλε καμπύλη έχουμε

$$y = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

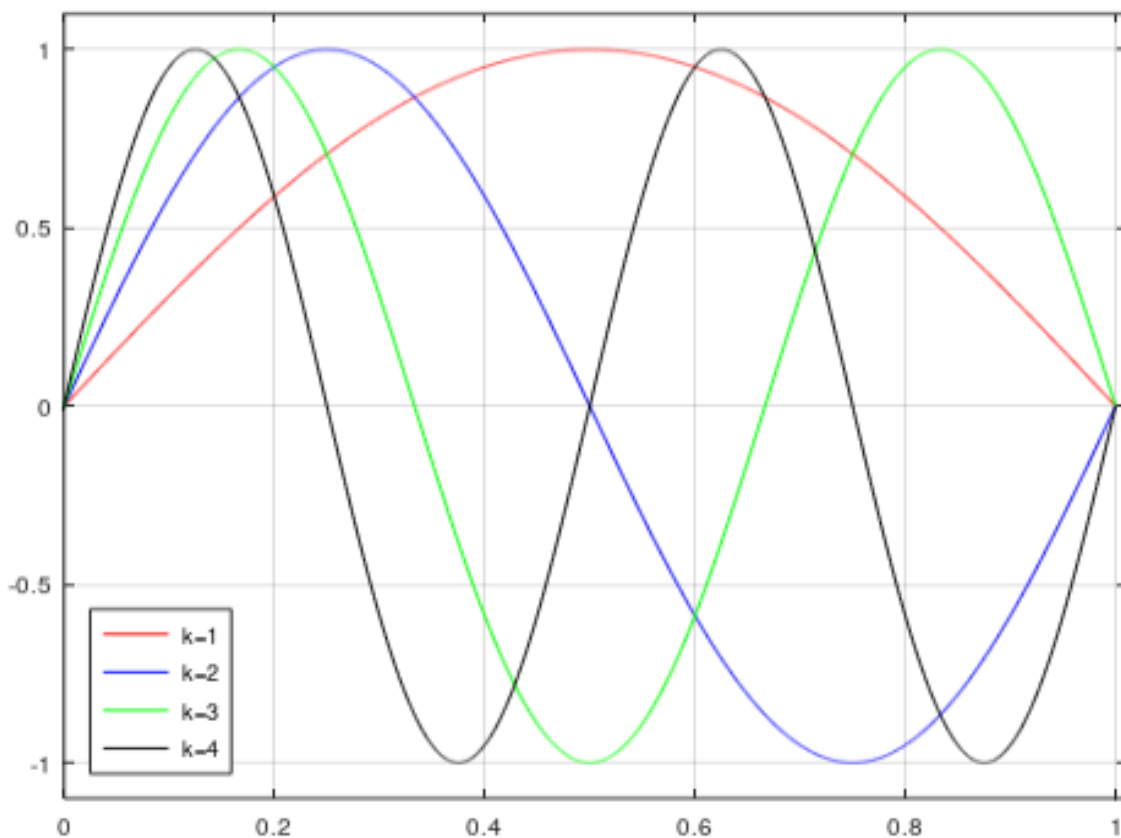
Αν το k είναι ίσο με

$$k = \frac{2\pi}{L},$$

τότε

$$k = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi L}{2\pi} = L$$

άρα η μπλε καμπύλη έχει ένα πλήρες κύμα ανάμεσα στα δύο τοιχώματα.



Σχήμα 4.3. Τέσσερις πιθανές καταστάσεις ταλάντωσης για το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο τοιχωμάτων.

- Για την πράσινη καμπύλη έχουμε

$$y = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

Αν το k είναι ίσο με

$$k = \frac{3\pi}{L},$$

τότε

$$k = \frac{3\pi}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \pi x \lambda = \frac{2\pi L}{3\pi} = \frac{2L}{3}$$

Το μήκος κύματος της πράσινης καμπύλης είναι τα $\frac{2}{3}$ της απόστασης L .

- Τέλος για την μαύρη καμπύλη

$$y = \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

Αν το k είναι ίσο με

$$k = \frac{4\pi}{L},$$

τότε

$$k = \frac{4\pi}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi L}{4\pi} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$$

Οπότε το μήκος κύματος είναι το μισό της απόστασης μεταξύ των δυο τοιχωμάτων, άρα θα υπάρχουν δυο πλήρη κύματα ανάμεσα στα τοιχώματα.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και η σχέση

$$y = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

ισχύει για $n = 1, 2, 3 \dots$

Μπορούμε να γράψουμε

$$E_x = E \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)$$

$$E_y = E \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right)$$

$$E_z = E \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

όπου n_x, n_y, n_z σχετίζονται με τον αριθμό των κυμάτων μεταξύ των τοιχωμάτων σε κάθε μια από τις κατευθύνσεις x, y, z μέσω των $k_x = \frac{n_x \pi}{L}, k_y = \frac{n_y \pi}{L}, k_z = \frac{n_z \pi}{L}$, σε κάθε μια από τις χωρικές κατευθύνσεις.

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο σε τρεις διαστάσεις γράφεται ως:

$$\vec{E} = E \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L} + \frac{n_y \pi y}{L} + \frac{n_z \pi z}{L} - \frac{2\pi c t}{\lambda}\right)$$

Υστερα από μερικές τριγωνομετρικές πράξεις γίνεται:

$$\vec{E} = E \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)$$

Λόγω της (4.3) έχουμε:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} E \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) = E \frac{n_x \pi}{L} \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E \left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) = -E_x \left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2$$

Αν κάνουμε το ίδιο για $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$ και $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ θα έχουμε:

$$\left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

που απλοποιείται σε:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2}$$

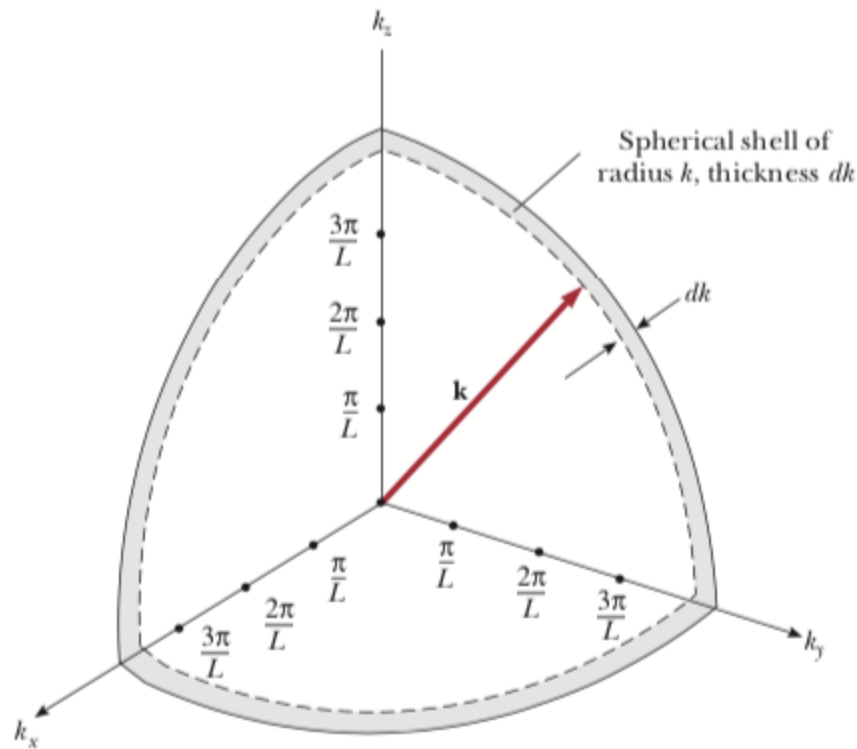
Επομένως είδαμε την λύση του στάσιμου κύματος στην εξίσωση κύματος για μια κυβική κοιλότητα με πλευρά μήκους L . Τώρα θα υπολογίσουμε τον συνολικό αριθμό N των επιτρεπόμενων τρόπων λειτουργίας στην κοιλότητα που έδωσε την λύση του στάσιμου κύματος. Στη συνέχεια τον αριθμό των τρόπων λειτουργίας ανά μονάδα μήκους κύματος στην κοιλότητα και τέλος την ενεργειακή πυκνότητα, ανά μονάδα μήκους κύματος και ανα μονάδα συχνότητας των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Αυτό θα αποτελέσει τον περίφημο νόμο Rayleigh–Jeans. [Evans, 2013b]

4.6 Συνολικός αριθμός καταστάσεων

Για να υπολογίσουμε τον συνολικό αριθμό των επιτρεπών καταστάσεων N στην κυβική κοιλότητα, πρέπει να αθροίσουμε όλες τις πιθανές τιμές των n_x, n_y, n_z . Για να γίνει αυτό, προσδιορίζουμε τον όγκο μιας σφαίρας, όπου ο άξονας x δίνεται από το n_x , ο άξονας y από το n_y και ο άξονας z από το n_z ως

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του N λαμβάνοντας υπόψη μας τον όγκο μιας σφαίρας με ακτίνα n που είναι $N = \frac{4\pi}{3}n^3$. Όπως βλέπουμε στο παρακάτω διάγραμμα 4.4



Σχήμα 4.4. Σφαιρική κοιλότητα ακτίνας k και πάχους dk

αν αθροίσουμε πάνω από n για μια σφαίρα θα συμπεριλάβουμε και αρνητικές τιμές των n_x , n_y , n_z , ενώ έχουμε μόνο θετικές τιμές του καθενός. Για να γίνει αυτό πρέπει να διαιρέσουμε με το 8, ως μέρος της σφαίρας, στο θετικό μέρος του διαγράμματος, που είναι το $\frac{1}{8}$ του συνολικού όγκου. Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$N = \left(\frac{4\pi}{3} n^3 \right) \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{3} n^3 = \frac{\pi}{3} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4L^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Που δίνει τον αριθμό των καταστάσεων στην κοιλότητα ως:

$$N = \frac{8\pi L^3}{3\lambda^3}.$$

Για να βρεθεί ο αριθμός των καταστάσεων ανά μονάδα μήκους κύματος, αρκεί να διαφοροποιήσουμε αυτή την έκφραση σε σχέση με το λ , δηλαδή να βρούμε $\frac{dN}{d\lambda}$. Επομένως:

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \right) = -3 \frac{8\pi L^3}{3\lambda^4} = -\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}.$$

Το αρνητικό δηλώνει ότι ο αριθμός των τρόπων μειώνεται με την αύξηση του μήκους κύματος και μπορεί να βρεθεί αν διαιρέσουμε με τον όγκο της κοιλότητας. [Evans, 2013c]

4.7 Η ενέργεια ανά μονάδα όγκου, μήκους κύματος και συχνότητας

Επειδή η ύλη και η ακτινοβολία βρίσκονται σε θερμική ισορροπία μεταξύ τους, μπορούμε να πούμε ότι η ενέργεια κάθε τρόπου της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι $E = k_B T$, όπου k_B η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin. Αυτό προέρχεται από την αρχή της ισοκατανομής της ενέργειας. Συμβολίζουμε την ενεργειακή πυκνότητα με το σύμβολο u και έτσι έχουμε ότι η ενέργεια ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα μήκους κύματος λ , δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{L^3} \frac{dE}{d\lambda} = \frac{1}{L^3} \left(\frac{dN}{d\lambda} \right) k_B T = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^4} = \frac{\nu^4}{c^4}$$

και από τον κανόνα της αλυσίδας μπορούμε να το γράψουμε:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{du}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\nu}$$

και

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2}$$

άρα

$$\frac{du}{d\nu} = (8\pi k_B T) \frac{\nu^4}{c^4} \left(\frac{c}{\nu^2} \right)$$

άρα έχουμε τον νόμο των Rayleigh-Jeans, ότι η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας δίνεται από την σχέση:

$$\frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi k_B T}{c^3} \right) \nu^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ο νόμος μετατόπισης του Wien

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε άλλο ένα τρόπο προσέγγισης της ακτινοβολίας από τον νόμο μετατόπισης του Wien και κάποιες εφαρμογές του στην αστρονομία. Ο νόμος του Wien μπορεί να προέλθει από τον νόμο του Planck, ο οποίος παράγει μια συνάρτηση του μήκους κύματος και της έντασης για ένα μέλαν σώμα με μεταβλητή θερμοκρασία. Παρά το γεγονός ότι ο νόμος του Planck διατυπώθηκε μετά τον νόμο του Wien, παρέχει μια πιο θεμελιώδη κατανόηση της σχέσης μεταξύ του μήκους κύματος, της έντασης και της θερμοκρασίας. τέλος παρουσιάσαμε τους περιορισμούς του νόμου του Wien σε μεγάλα μήκη κύματος και χαμηλές θερμοκρασίες.

5.1 Ο νόμος του Wien

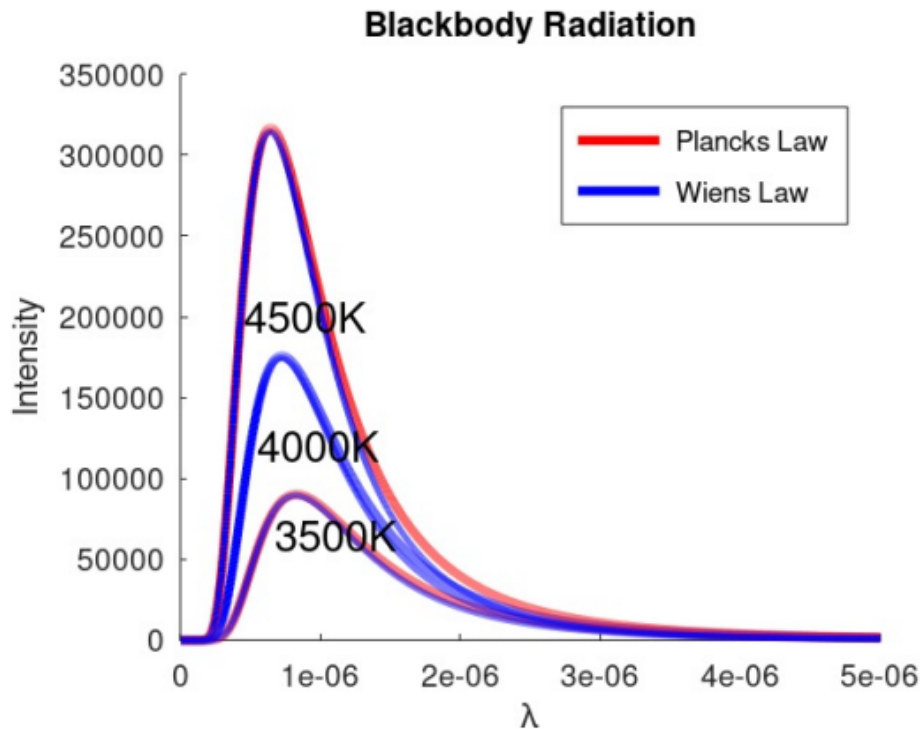
Ο νόμος μετατόπισης της Wien δηλώνει ότι στο μέλαν σώμα, η καμπύλη ακτινοβολίας για ένα αντικείμενο, ποικίλλει ανάλογα με τη θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, περιγράφει πώς το μέγιστο μήκος κύματος της ακτινοβολίας μέλανος σώματος αλλάζει με τη θερμοκρασία. Ο νόμος μετατόπισης διατυπώθηκε αρχικά από τον Wilhelm Wien το 1893. Ο Wien χρησιμοποίησε ένα θερμοδυναμικό πείραμα σκέψης για να αντλήσει το νόμο του. Έλαβε υπόψη του μια κοιλότητα με φως μέσα, όπου διαστέλλεται αργά με αδιαβατικό τρόπο. Βρήκε ότι η συχνότητα και η ενέργεια του φωτός αλλάζουν με τον ίδιο τρόπο. Με βάση αυτό, ο Wien θεώρησε ότι η κορυφή του μήκους κύματος πρέπει να αλλάζει σύμφωνα με την αλλαγή της ενέργειας, η οποία σχετίζεται άμεσα με τη θερμοκρασία. Επτά χρόνια αργότερα, το 1900, ο Max Planck παρήγαγε έναν νόμο, ο οποίος περιγράφει τη φασματική πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από ένα μέλαν σώμα, όπως διατυπώθηκε παρακάτω:

$$E(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (5.1)$$

Ο νόμος του Planck μπορεί να θεωρηθεί ως μια πιο ολοκληρωμένη και θεμελιώδης εκδοχή του νόμου του Wien, που παράγει μια ολόκληρη συνάρτηση και όχι απλώς την κορυφή ενός μήκους κύματος. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό, η εξαγωγή του νόμου του Wien από τον νόμο του Planck είναι η πιο ορθή από φυσικής άποψη παραγωγή του νόμου που μπορούμε να παράγαγουμε. Ο νόμος του Planck παράγει μια συνεχή συνάρτηση που είναι μοναδική για κάθε θερμοκρασία μέλανος σώματος. Στο παρακάτω Σχήμα 5.1, δείχνεται το φάσμα μέλανος σώματος σε διάφορες θερμοκρασίες. Καθορίζει το μήκος κύματος της κορυφής, οπότε περιλαμβάνει την εύρεση μέγιστης τιμής του νόμου του Planck ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Το πρώτο βήμα είναι να πάρουμε τη μερική παράγωγο του νόμου του Planck, συναρτήσει του μήκους κύματος λ .

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^6} \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1 \right) \left(\frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} - 5 \right) \quad (5.2)$$



Σχήμα 5.1. Γραφική παράσταση του νόμου Wien και νόμου Planck για κάποιες θερμοκρασίες μέλανος σώματος. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες παρουσιάζουν ένα μέγιστο, το οποίο μετατοπίζεται προς μικρότερα μήκη κύματος, καθώς αυξάνεται η απόλυτη θερμοκρασία T πράγμα που εκφράζει ο νόμος μετατόπισης του Wien.

Στη συνέχεια, ορίζοντας την (5.2) ίση με μηδέν και απλοποιώντας την, έχουμε:

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1\right)} - 5 \quad (5.3)$$

Θέτουμε

$$x \equiv \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

όπου η εξίσωση (5.3) γίνεται:

$$\frac{x \exp(x)}{\exp(x) - 1} - 5 = 0 \Rightarrow \quad (5.4)$$

$$\exp(x) \cdot (x - 5) + 5 = 0 \quad (5.5)$$

Επομένως η σχέση μεταξύ μήκους κύματος και θερμοκρασίας είναι:

$$\lambda = \frac{hc}{xk_B T} \quad (5.6)$$

Συνδέοντας τις σταθερές τιμές $h = 6,626 \times 10^{-27}$, $c = 3 \times 10^{10}$, $k_B = 1,381 \times 10^{-16}$ και την τιμή του x που βρήκαμε παραπάνω, καταλήγουμε στον νόμο του Wien:

$$\lambda = \frac{b}{T} \quad (5.7)$$

όπου η σταθερά $b = 2.89777 \times 10^{-3} \text{m K}$ είναι γνωστή ως σταθερά μετατόπισης του Wien. Ο Wien αρχικά, βρήκε αυτή τη σταθερά πειραματικά και αργότερα υποστηρίχθηκε αναλυτικά από τον Planck. [Σιμοερίδης, 2015]

5.2 Εφαρμογές του νόμου μετατόπισης στην αστρονομία

Στην αστρονομία, ο νόμος μετατόπισης του Wien χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των θερμοκρασιών των αστεριών. Το αστρικό φάσμα του Ήλιου, φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα που δίνεται στο Σχήμα 5.2.

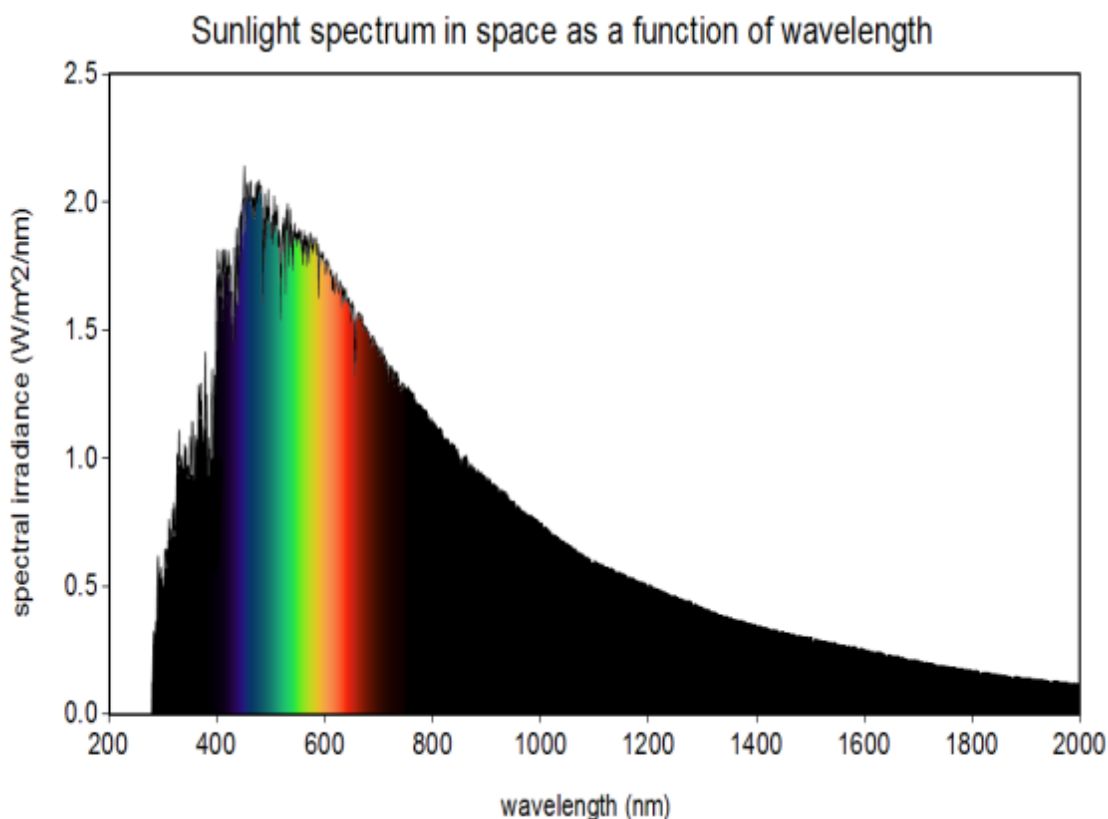
Αυτό το γράφημα δημιουργήθηκε κάνοντας φασματοσκοπία στο φώς του Ήλιου. Από το σχήμα, μπορούμε να δούμε ότι το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο μέγιστο του διαγράμματος, είναι περίπου

$$\lambda = 500 \times 10^{-9} \text{m} = 500 \text{nm} .$$

Τώρα συνδέοντας αυτό στην εξίσωση (5.7):

$$T_{sun} \approx \frac{2.89777}{5.0 \times 10^{-7}} \approx 5800 \text{K} \quad (5.8)$$

Η κατανόηση της σύνδεσης μεταξύ της θερμοκρασίας και των φασμάτων των αστεριών, μας βοηθά να αποκτήσουμε μια θεμελιώδη κατανόηση των αστεριών γενικότερα. Ένα βασικό παράδειγμα αυτού είναι το διάγραμμα Hertzsprung – Russel το οποίο δείχνεται στο Σχήμα 5.3. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, εκτός του ότι η κατηγοριοποίηση των αστεριών γίνεται



Σχήμα 5.2. Φάσμα της Ηλιακής ακτινοβολίας

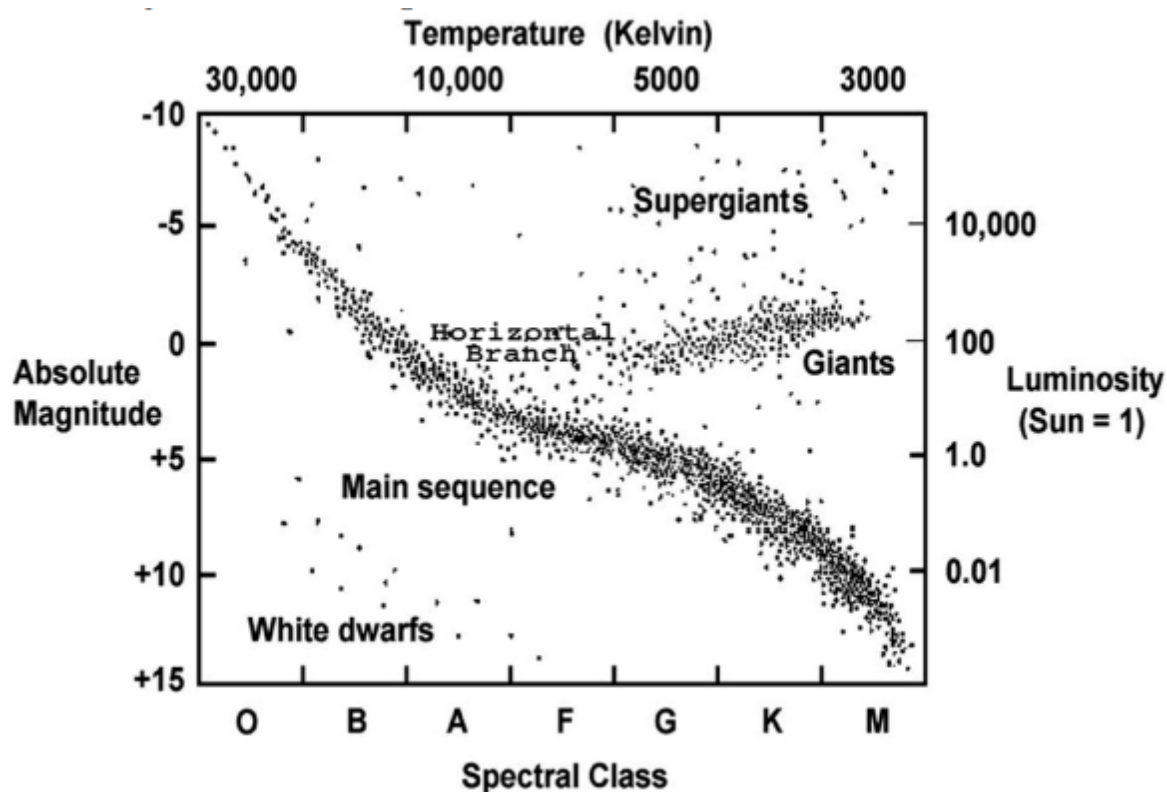
Πηγή [Pfaffman, 2022]

αρκετά εύκολη όταν υπάρχει αυτή σχέση μεταξύ θερμοκρασίας και φωτεινότητας, δίνεται η δυνατότητα να διερευνήσουμε την εξέλιξη των άστρων από την κύρια ακολουθία στους γίγαντες και τελικά στους λευκούς νάνους.

5.3 Περιορισμοί

Παρά την χρησιμότητα του σε πολλές περιπτώσεις, ο νόμος μετατόπισης του Wien, δεν κάνει ακριβείς προβλέψεις σε μεγάλα μήκη κύματος και χαμηλές θερμοκρασίες. Μια συνεχής καμπύλη δεν μπορεί να ληφθεί από τον νόμο του Wien σε χαμηλές θερμοκρασίες.

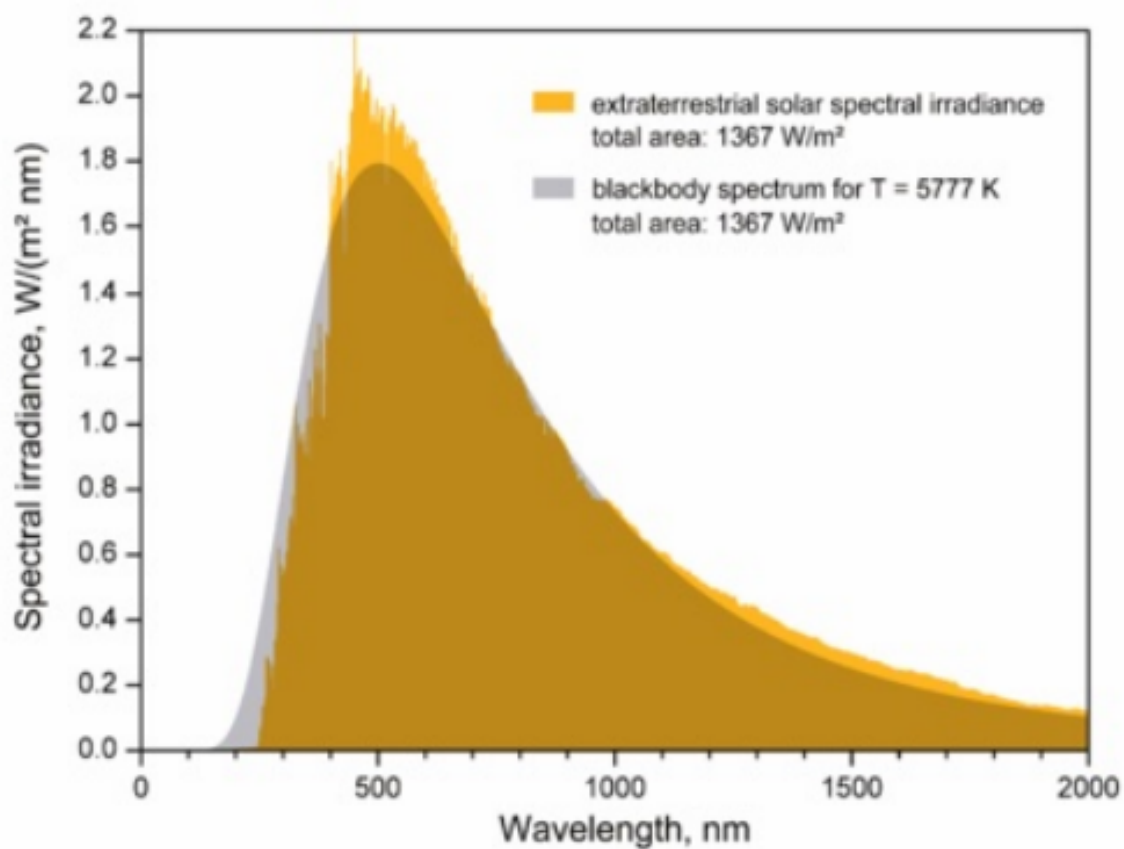
Ένας άλλος περιορισμός είναι ότι πρέπει να υποθέσουμε πως ο πομπός είναι ένα μαύρο σώμα. Στην πραγματικότητα, κανένα αντικείμενο δεν μπορεί να είναι μαύρο σώμα, επομένως το πιο κοντινό που μπορεί να φτάσει ένα αντικείμενο είναι να εκπέμπει ως σχεδόν μαύρο σώμα. Αυτό οδηγεί σε ανακριβείς προβλέψεις από τον νόμο μετατόπισης



Σχήμα 5.3. Διάγραμμα Hertzsprung – Russel

Πηγή: [Pfaffman, 2022]

του Wien και τον νόμο του Planck, αλλά και οι δύο νόμοι εφαρμόζονται καλά για την προσέγγιση του προβλήματος. Το παρακάτω γράφημα που δίνεται στο Σχήμα 5.4 δείχνει τη διαφορά μεταξύ του πραγματικού φάσματος του ηλιακού φωτός και του φάσματος που προβλέπεται για ένα μέλαν σώμα από το νόμο του Planck.



Σχήμα 5.4. Extraterrestrial solar spectral radiance.

Πηγή: [Pfaffman, 2022]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ο νόμος των Stefan-Boltzmann

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται άλλη μια απόπειρα υπολογισμού της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Παρουσιάζονται δυο διατυπώσεις του νόμου των Stefan-Boltzmann. Μια για την πυκνότητα ενέργειας και μια για την ένταση της ακτινοβολίας. Έπειτα γίνεται ένας αναλυτικός υπολογισμός όπου δείχνεται πως από τον νόμο του Planck καταλήγουμε στον νόμο των Stefan-Boltzmann, καθώς και σε παρατηρήσεις που προκύπτουν κατά την χρήση της εξίσωσης των Stefan-Boltzmann. Τέλος αναφέρουμε και το φαινόμενο του θερμοκηπίου.

6.1 Ο νόμος των Stefan-Boltzmann

Όταν δύο αντικείμενα έρχονται σε επαφή, η θερμότητα ρέει από το θερμότερο προς το ψυχρότερο έως ότου τα δύο αντικείμενα φτάσουν σε θερμική ισορροπία. Ωστόσο, ακόμα κι αν τα δύο αντικείμενα δεν έρχονται σε επαφή και δεν υπάρχει φυσικό μέσο για τη μεταφορά θερμότητας, τα δύο αντικείμενα θα φτάσουν τελικά σε μια κοινή θερμοκρασία. Αυτό συμβαίνει επειδή αντικείμενα με μη μηδενική θερμοκρασία απελευθερώνουν και απορροφούν ενέργεια μέσω της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Αυτή η εκπεμπόμενη ενέργεια ονομάζεται συνήθως θερμική ακτινοβολία. Για αρκετά θερμά αντικείμενα, ένα κλάσμα αυτής της θερμικής ακτινοβολίας βρίσκεται στο φάσμα του ορατού φωτός, επιτρέποντας σε αυτό το φαινόμενο να φαίνεται με γυμνό μάτι. Το βλέπουμε συνήθως στα μέταλλα, καθώς αρχίζουν να λάμπουν όταν είναι αρκετά ζεστά. Τα μη ορατά αποτελέσματα της θερμικής ακτινοβολίας είναι εύκολα παρατηρήσιμα στην καθημερινή πρακτική με θερμά αντικείμενα, όπως μια φωτιά ή μια λάμπα αλογόνου που θερμαίνουν αισθητά το περιβάλλον. Η ποσότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται είναι ανάλογη με τη θερμοκρασία του αντικειμένου, και αυτό ισχύει στην καθημερινή ζωή. Παρατηρούμε συχνά ότι ένα καυτό, λαμπερό αντικείμενο θα γίνει πιο φωτεινό με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Η ακριβής σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας ενός αντικείμενο και της ποσότητας της ακτινοβολίας που εκπέμπεται έχει διερευνηθεί από αρκετούς διάσημους φυσικούς, συμπεριλαμβανομένων των Max Planck και Wilhelm Wien. Το 1879, ο νόμος που περιγράφει αυτή τη σχέση ανακαλύφθηκε για πρώτη φορά πειραματικά από τον Josef Stefan. Λίγο αργότερα, ο Ludwig Boltzmann το εξήγαγε θεωρητικά.

Ενώ ο νόμος Stefan-Boltzmann έχει προφανείς εφαρμογές, έχει επίσης μεγάλη σημασία για την αστροφυσική. Η άμεση μέτρηση πολλών από τις φυσικές ιδιότητες μακρινών αστρονομικών σωμάτων είναι σαφώς αδύνατη. Ωστόσο, παρατηρώντας απλώς το φάσμα ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, είναι δυνατόν να υπολογισθεί η θερμοκρασία επιφάνειας και ενέργεια εξόδου μακρινών αστεριών [Wellons, 2007].

6.2 Boltzmann ο πρωτοπόρος της μοντέρνας φυσικής

Από δυο απόψεις, ο Ludwig Boltzmann ήταν ο πρωτοπόρος της κβαντικής μηχανικής. Πρώτον επειδή στη στατιστική ερμηνεία του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής, εισήγαγε τη θεωρία πιθανοτήτων σε έναν θεμελιώδη νόμο της φυσικής και έτσι έσπασε την κλασική προκατάληψη ότι οι θεμελιώδεις νόμοι πρέπει να είναι αυστηρά ντετερμινιστικοί. Ακόμα και ο Planck δεν ήταν έτοιμος να δεχτεί τις στατιστικές μεθόδους του Boltzmann μέχρι το 1900. Στην πραγματικότητα σε ένα έγγραφο το 1897 ο Boltzmann είχε ήδη προτείνει στον Planck να χρησιμοποιήσει τις στατιστικές του μεθόδους για τη διερεύνηση της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος. Το δεύτερο πρωτοποριακό βήμα προς την κβαντική μηχανική ήταν η εισαγωγή διακριτών ενεργειακών επιπέδων. Ο Boltzmann χρησιμοποίησε ήδη αυτή τη μέθοδο στην εργασία του το 1872 στο H -Θεώρημα. Σε αυτό το σημείο ο Ostwald αναφέρει ότι όταν αυτός και ο Planck προσπάθησαν να πείσουν τον Boltzmann για την υπεροχή των καθαρά θερμοδυναμικών μεθόδων έναντι του ατομισμού στο Συνέδριο του Halle το 1891, ο Boltzmann είπε ξαφνικά: "Δεν βλέπω κανένα λόγο για τον οποίο η ενέργεια δεν πρέπει να διαιρείται ατομικά".

Πριν από το 1900, η κλασική Νευτώνεια μηχανική ήταν το πρωτότυπο μιας επιτυχημένης φυσικής θεωρίας. Πολλοί φυσικοί, ανάμεσα τους και ο Planck, πίστευαν πώς ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής ήταν ένα βασικό αξίωμα που παραδόθηκε από το Θεό, το οποίο έπρεπε να δεχτεί κανείς ως το σημείο εκκίνησης οποιασδήποτε θερμοδυναμικής θέωρησης. Σε αντίθεση με αυτή την άποψη ήταν η στατιστική ερμηνεία του Boltzmann για τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής που διατύπωσε για πρώτη φορά το 1877, σχεδόν 50 χρόνια πριν από τη στατιστική ερμηνεία της Κβαντικής Μηχανικής. [Flamm, 2008]

6.3 Δύο διατυπώσεις του νόμου των Stefan–Boltzmann

6.3.1 Πυκνότητα ενέργειας $u(T)$

Ο νόμος των Stefan–Boltzmann αφορά την πυκνότητα ενέργειας ενός μέλανος σώματος θερμοκρασίας T . Θα ολοκληρώσουμε την εξίσωση (3.12) χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\hbar}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{\hbar\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu \Rightarrow$$

$$u(T) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \frac{k_B T}{\hbar} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx \Rightarrow$$

$$u(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4 T}{15c^3 \hbar^3 T^4} \Rightarrow$$

$$u(T) = \alpha T^4 \quad (6.1)$$

6.3.2 Ένταση ακτινοβολίας I

Ο νόμος των Stefan-Boltzmann αφορά την ενέργεια που εκπέμπεται από το μέλαν σώμα ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή την εκπεμπόμενη ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας ή αλλιώς την ένταση της ακτινοβολίας I .

Ας θεωρήσουμε δεδομένο ότι από την κινητική θεωρία των αερίων ο αριθμός κρούσεων των σωματιδίων (εδώ φωτονίων) στα τοιχώματα ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$\Phi_\sigma = \frac{n}{4} \bar{v}, \quad (6.2)$$

όπου n είναι η πυκνότητα σωματιδίων και $\bar{v}$, είναι η μέση ταχύτητα των σωματιδίων (εδώ φωτονίων). Άρα για τα φωτόνια

$$\Phi_\gamma = \frac{n}{4} c \quad (6.3)$$

Αλλά

$$I = \overline{h\nu} \Phi_\gamma, \quad (6.4)$$

όπου

$$\overline{h\nu} = \frac{u}{n} \quad (6.5)$$

Είναι η μέση τιμή ενέργειας που μεταφέρει κάθε φωτόνιο. Απο τις εξισώσεις (6.3), (6.4), (6.5) έχουμε ότι

$$I = \frac{c}{4}u \quad (6.6)$$

Οπότε λόγω της εξίσωσης (6.1)

$$I = \left(\frac{2\pi^5 k_B^4 T}{15c^3 \hbar^3} \right) T^4$$

$$I = \sigma T^4 \quad (6.7)$$

[Σιμοσερίδης, 2015]

6.4 Από τον Planck στους Stefan–Boltzmann

Από χρονολογική άποψη, ο J. Stefan, στη μέτρηση της μεταφοράς θερμότητας ενός σύρματος πλατίνας ανάλογα με τη θερμοκρασία του (1879), καθιέρωσε εμπειρικά την αναλογικότητα της πυκνότητας της ροής της εκπεμπόμενης ενέργειας στον τέταρτο βαθμό της απόλυτης θερμοκρασίας, για την εκπομπή του οποιουδήποτε σώματος για πρώτη φορά. Ωστόσο, περαιτέρω μετρήσεις έδειξαν την εγκυρότητά του μόνο για την εκπομπή του μέλανος σώματος. Το 1884, ο Ludwig Boltzmann ως μαθητής του Stefan, χρησιμοποιώντας θερμοδυναμικές εκτιμήσεις, απέκτησε θεωρητικά τον νόμο της αναλογικότητας της πυκνότητας της ροής I της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος στον τέταρτο βαθμό της θερμοκρασίας του σε βαθμούς kelvin. Η σχέση της πυκνότητας της ροής της ακτινοβολίας I που εκπέμπεται από το μέλαν σώμα σε ένα ημισφαίριο με δείκτη διάθλασης $n = 1$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$I = \sigma T^4 \quad (6.8)$$

όπου $\sigma = (5,6687 \pm 0,0010) \times 10^{-8}$ είναι η σταθερά των Stefan–Boltzmann. Η εξίσωση (6.8) ονομάστηκε νόμος των Stefan–Boltzmann. Το 1900 ο Max Planck βασισμένος στην κβαντική θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, έδειξε ότι η πυκνότητα ροής της φασματικής ακτινοβολίας μέλανος σώματος δίνεται από την σχέση:

$$E(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right)} \quad (6.9)$$

όπου ν η συχνότητα, h η σταθερά του Planck, k_B η σταθερά του Boltzmann και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Η εξίσωση (6.9) για τον προσδιορισμό της πυκνότητας ροής της φασματικής ακτινοβολίας χρησιμοποιώντας το μήκος κύματος λ όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.1, αντί της συχνότητας ν μπορεί να γραφεί ως:

$$E(T) = \frac{c_1}{\lambda^5 [\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1]} \quad (6.10)$$

όπου οι σταθερές ποσότητες $c_1 = 3,7413 \cdot 10^{-6}$, $c_2 = 1,4380 \cdot 10^{-2}$ ονομάζονται σταθερές του Planck αντίστοιχα. Συνήθως επισημαίνεται ότι η εξίσωση (6.8) είναι ένα ολοκλήρωμα της πυκνότητας ροής της φασματικής ακτινοβολίας μέλανος σώματος $E(T)$ σε όλα τα μήκη κύματος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας λ όπου κυμαίνονται από 0 έως ∞ , άρα

$$E(T) = \int_0^\infty E(T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (6.11)$$

Η αναλυτική απόδειξη του νόμου των Stefan-Boltzmann για την ροή ακτινοβολίας από τον νόμο του Planck για την φασματική ροή ακτινοβολίας συνιστά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης (6.10), δηλαδή

$$E(T) = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 [\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1]} d\lambda \quad (6.12)$$

όπου το ολοκλήρωμα (6.12) είναι ακατάλληλο για την τιμή $\lambda = 0$ και για $\lambda \rightarrow \infty$. Έτσι, θα πρέπει να διασφαλιστεί ότι συγκλίνει τόσο στο $\lambda = 0$ όσο και στο $\lambda \rightarrow \infty$ για αυτό το λόγο, έχει μια αρκετά σαφή φυσική σημασία. Για να διευκολυνθούν οι εκτιμήσεις και ο περαιτέρω υπολογισμός του ολοκληρώματος στην εξίσωση (6.12), είναι λογικό να αντικατασταθεί η μεταβλητή στο ολοκλήρωμα, θέτοντας

$$x = \frac{c_2}{\lambda T} \Rightarrow \lambda = \frac{c_2}{xT}$$

$$d\lambda = -\frac{c_2}{Tx^2} dx$$

και τα όρια ολοκλήρωσης από $\lambda = 0$ και $\lambda \rightarrow \infty$ μετασχηματίζονται σε $x \rightarrow \infty$ και $x=0$ αντίστοιχα. Μετά από αυτήν την αντικατάσταση, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$E(T) = c_1 \int_0^\infty \frac{[(T/c_2)^5 \cdot (c_2/T) \cdot (-x^{-2})]dx}{\exp(x-1)} = c_1(T/c_2)^4 \cdot \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x)-1} \quad (6.13)$$

Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (6.13) στο $x \rightarrow \infty$, τότε ο όρος

$$\frac{x^3}{\exp(x)-1}$$

θα έχει φθίνουσα σειρά στο $x \rightarrow \infty$ υψηλότερη από

$$\frac{1}{x^a}$$

για $a > 1$. Επομένως, η ολοκληρωτική σύγκλιση στο $x \rightarrow \infty$ λαμβάνει χώρα όταν η συνάρτηση

$$x^3 \exp(-x)$$

που ορίζει τη μείωση στο υπό εξέταση ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν για $x \rightarrow \infty$ πιο γρήγορα από οποιονδήποτε βαθμό

$$\frac{1}{x}$$

Στον παρονομαστή

$$\frac{x^3}{\exp(x)-1}$$

η μονάδα αγνοείται σε σύγκριση με το $\exp(x)$. Για να δικαιολογήσουμε τη σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος στην εξίσωση (6.13) στο $x = 0$ και να το υπολογίσουμε στη συνέχεια, είναι λογικό να χρησιμοποιηθεί ο τυπικός ορισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος στο $x \rightarrow 0$,

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{x^3 \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx \right] \quad (6.14)$$

όπου η τελευταία έκφραση προέκυψε πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του ολοκληρώματος στην προτελευταία εξίσωση με $\exp(-x)$. Το τμήμα

$$\frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-x)}$$

του ολοκληρώματος στο τελευταίο ολοκλήρωμα στο (6.14), μετά την αντικατάσταση

$$\exp(-x) = z$$

μπορεί να επεκταθεί με τον τύπο γεωμετρικής προόδου

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}$$

σε μια δυναμοσειρά που συγκλίνει ομοιόμορφα στο z σε οποιοδήποτε διάστημα $[0, q]$ της μεταβολής z .

Επιστρέφοντας στην παραπάνω δυναμοσειρά με τη μορφή της γεωμετρικής προόδου στη μεταβλητή x της σχέσης

$$\exp(-x) = z$$

και στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της λαμβανόμενης σειράς με x^3 , μπορούμε να λάβουμε τις ομοιόμορφα συγκλίνουσες σειρές του x στο διάστημα $[\varepsilon, +\infty]$ για το ολοκλήρωμα στο τελευταίο μέρος της εξίσωσης (6.14).

$$\frac{\exp(-x)x^3}{1-\exp(-x)} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-[n+1]x) \quad (6.15)$$

Αυτό συμβαίνει αφού οι συνθήκες του κριτηρίου Weierstrass θα ικανοποιούνται για μια νέα σειρά υπό την συνθήκη

$$0 < \varepsilon \leq x$$

λόγω της ανίσωσης

$$z = \exp(-x) \leq \exp(-\varepsilon) = q < 1$$

και το διάστημα $[0, q]$ αντιστοιχεί στο διάστημα $[\varepsilon, \infty)$ στην εκθετική αντικατάσταση

$$z = \exp(-x)$$

$$q = \exp(-\varepsilon)$$

Οι παρατηρήσεις που παρουσιάζονται δικαιολογούν τη μείωση την εξίσωσης

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^3 \exp(-x)}{1-\exp(-x)} dx \right], \quad (6.16)$$

της εξίσωσης (6.14) στην ισοδύναμη μορφή

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-[n+1]x) dx \right], \quad (6.17)$$

Η σειρά κάτω από το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (6.17) συγκλίνει ομοιόμορφα στο x και μόνο στο x στο διάστημα $\varepsilon \leq x < \infty$. Επομένως, αυτή η σειρά μπορεί να ενσωματωθεί όρο προς όρο, γεγονός που καθιστά δυνατή τη μετατροπή της εξίσωσης (6.17) στην ισοδύναμη μορφή

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} x^3 \exp(-(n+1)x) dx \right) \right) \quad (6.18)$$

Σε κάθε ολοκλήρωμα κάτω από το πρόσημο άθροισης, είναι λογικό να γίνει αντικατάσταση από τον τύπο,

$$(n+1)x = t.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το κατώτερο όριο $x = \varepsilon$ κάθε αρχικού ολοκληρώματος μετασχηματίζεται στο νέο κατώτερο όριο

$$t = (n+1)\varepsilon$$

και το ανώτερο όριο $x = +\infty$ κάθε αρχικού ολοκληρώματος μετασχηματίζεται στο νέο ανώτερο όριο $t = +\infty$. Είναι επίσης προφανές ότι

$$dx = \frac{1}{(n+1)} dt.$$

Χρησιμοποιώντας τη νέα μεταβλητή t η εξίσωση (6.18) παίρνει τη μορφή

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} t^3 \frac{1}{n+1} \exp(-t) dt \right) \right). \quad (6.19)$$

Στην εξίσωση (6.19), αφού αφαιρεθούν οι σταθερές

$$(n+1)^{-4}$$

από το ολοκλήρωμα, κάθε όρος της σειράς μπορεί να γραφεί ως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} t^3 \exp(-t) dt \right) \right). \quad (6.20)$$

Στην (6.20), η σειρά κάτω από το όριο συγκλίνει ομοιόμορφα στην παράμετρο ε σύμφωνα με το κριτήριο Weierstrass, δεδομένου ότι η αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4}$$

συγκλίνει και η αριθμητική τιμή κάθε ολοκληρώματος

$$f_n(\varepsilon) = \int_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty} t^3 \exp(-t) dt,$$

οριοθετείται ομοιόμορφα από πάνω από την κοινή τιμή των ορίων στο $\varepsilon \rightarrow 0+$ της συνάρτησης Γάμμα,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \exp(-t) dt.$$

Για $s = 4$ έχουμε ότι,

$$\Gamma(4) = \int_0^{\infty} t^3 \exp(-t) dt = 3! \quad (6.21)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς στην (6.20) με παράμετρο ε $0 \leq \varepsilon \leq 1$ μπορούμε να προχωρήσουμε το όριο στην (6.20) κάτω από το πρόσημο άθροισης σειράς. Στη συνέχεια, δεδομένου του γεγονότος ότι μετά τη μετάβαση του ορίου στο $\varepsilon \rightarrow 0+$ όλα τα ολοκληρώματα παίρνουν την ίδια τιμή (6.21) μετατρέποντας την σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} t^3 \exp(-t) dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \cdot 3! \quad (6.22)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστή έκφραση για το άθροισμα των σειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

η εξίσωση (6.13) παίρνει την τελική μορφή

$$E(T) = c_1 \left(\frac{T}{c_2} \right)^4 \left(\frac{\pi^4}{15} \right) = \left(\frac{c_1 \pi^4 T^4}{15 c_2^4} \right) = \sigma T^4. \quad (6.23)$$

όπου

$$\sigma = \frac{c_1 \pi^4 T^4}{15c_2^4}$$

Έτσι, με βάση το νόμο του Planck για τη φασματική ροή ακτινοβολίας, ο νόμος Stefan-Boltzmann για το ολοκλήρωμα της ροής ακτινοβολίας, προέκυψε με αυστηρό αναλυτικό τρόπο με πλήρη μαθηματική αιτιολόγηση. [Bityukov et al., 2018]

6.5 Παρατηρήσεις για την εξίσωση Stefan – Boltzmann

Η εξίσωση Stefan-Boltzmann είναι μάλλον σχετικά απλή: ένα σώμα, όπως το μέλαν σώμα με επιφανειακή θερμοκρασία T εκπέμπει ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και μονάδα επιφάνειας, και I , η ροή πυκνότητας

$$I = \sigma T^4, \quad (6.24)$$

όπου σ είναι η σταθερά Stefan - Boltzmann. Όταν ο νόμος Stefan-Boltzmann εφαρμόζεται στο σύστημα Γης-Ατμόσφαιρας, οι επιστήμονες κάνουν τα παρακάτω πιο συχνά τεχνικά λάθη:

- Ένας συντελεστής ε στην περιοχή από 0 έως 1, που ονομάζεται εκπομπή, θα πρέπει να πολλαπλασιάζει από τη δεξιά πλευρά, αλλά όχι όταν εφαρμόζεται σε αντικείμενα που δεν είναι μαύρα σώματα.
- Αδυναμία προσδιορισμού της επιφάνειας και της θερμοκρασιακής επιφάνειας του συστήματος Γης-Ατμόσφαιρας.
- Αδυναμία προσδιορισμού εάν ένα στρώμα αέρα είναι ένα μεμονωμένο αντικείμενο ή ένα σύμπλεγμα αντικειμένων.

Αυτά τα σφάλματα μπορούν εύκολα να αποδειχθούν εξετάζοντας πολλές μεθοδολογίες:

- Το φαινόμενο της θέρμανσης του θερμοκηπίου στους 33°C για τη Γη.
- Τα 390 W/m^2 επιφανειακής ακτινοβολίας στον προϋπολογισμό για την ενέργεια της Γης.

6.6 Το φαινόμενο θερμοκηπίου

Λέγεται ότι η μέση θερμοκρασία της Γης θα ήταν 33°C χαμηλότερη από ό,τι σήμερα αν δεν υπήρχε το φαινόμενο θέρμανσης των αερίων του θερμοκηπίου.

$$33^{\circ}\text{C} = 15^{\circ}\text{C} - (-18^{\circ}\text{C})$$

Οι -18°C λαμβάνονται από την εξίσωση της ισορροπίας ακτινοβολίας μεταξύ της εισερχόμενης ροής από τον Ήλιο και εξερχόμενης ροής από τη Γη:

$$\pi r^2(1 - a)S_0 = 4\pi r^2\varepsilon\sigma T^4, \quad (6.25)$$

όπου r είναι η ακτίνα της Γής, a είναι ο λόγος της ανακλώμενης προς την προσπίπτουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ενός σώματος στη γή και $S_0 = 1368\text{W}/\text{m}^2$ είναι η ηλιακή σταθερά που αντιπροσωπεύει την εισερχόμενη πυκνότητα ροής της ενέργειας της ηλιακής ακτινοβολίας. Το σύμβολο ε είναι η εκπομπή από την επιφάνεια της Γής. Σε πολλές κλιματικές έρευνες, το ε είτε λείπει, είτε θεωρείται ότι είναι 1. Εισάγοντας τις τιμές

$$a = 0,3$$

$$\varepsilon = 1$$

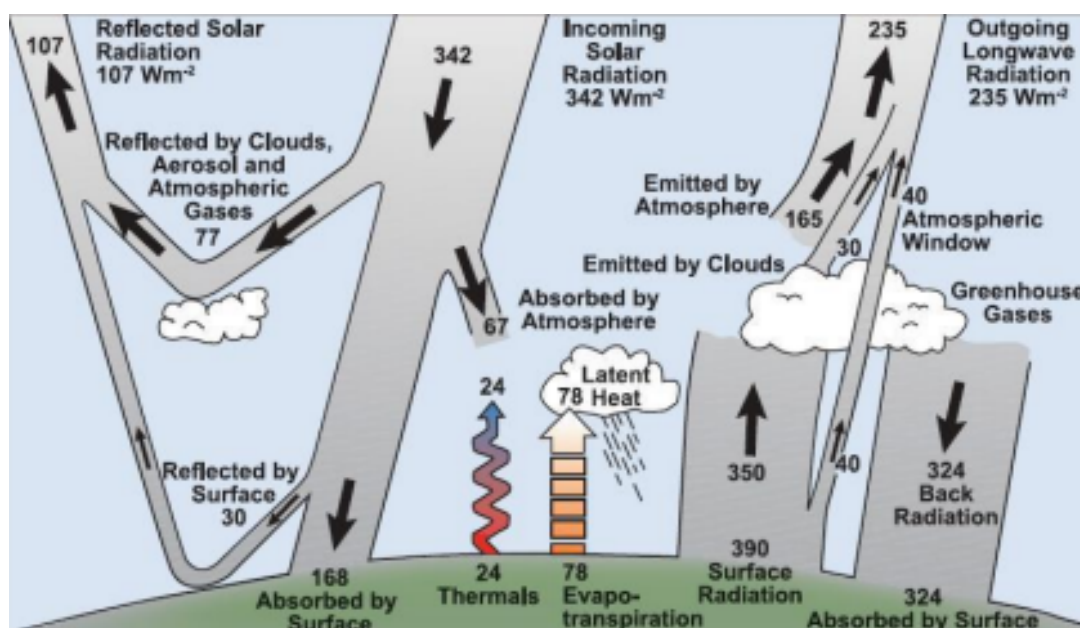
στην εξίσωση (6.25) και λύνοντας ως προς T :

$$T = {}^4\sqrt{\frac{(1 - a)S_0}{4\varepsilon\sigma}} = {}^4\sqrt{\frac{(1 - 0,3) \cdot 1368}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} = 254,9\text{K} \simeq 225\text{K} \simeq -18^{\circ}\text{C}. \quad (6.26)$$

Για $\varepsilon = 1$, υποθέτουμε ότι η επιφάνεια της γής είναι μια επιφάνεια μέλανος σώματος, κάτι που δεν ισχύει. Αν το ε δεν είναι 1, αλλά 0,9, 0,8, 0,7 ή 0,6 τότε η T θα γινόταν $-11,4^{\circ}\text{C}$, $-3,6^{\circ}\text{C}$, $5,5^{\circ}\text{C}$ ή $16,5^{\circ}\text{C}$ αντίστοιχα. Η εύρεση -18°C είναι ένα τεχνικό σφάλμα. Στην πραγματικότητα, η ικανότητα εκπομπής της επιφάνειας της γής μπορεί να προσδιοριστεί για $\varepsilon \simeq 0,7$ από δορυφορικά φάσματα εξερχόμενης ακτινοβολίας.

Η μέση θερμοκρασία του αέρα κοντά στην επιφάνεια της γης, όπως μετράται από το παγκόσμιο σταθμό καιρού, είναι περίπου $15^{\circ}\text{C} \simeq 288\text{K}$. Τα N_2 και O_2 που είναι κυριολεκτικά διαφανή σώματα, αποτελούν το 99 % του αέρα. Λευκά και διάφανα σώματα δεν εκπέμπουν τίποτα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία.

Αυτό το σφάλμα προέρχεται από μια παρανόηση της λέξης "επιφάνεια" που είναι μια συμβολική αντίληψη του νόμου των Stefan-Boltzmann. Εάν δεν υπάρχει ατμόσφαιρα, με τον όρο επιφάνεια, εννοούμε την χερσαία και υδάτινη επιφάνεια του εδάφους της Γης και το T αντιπροσωπεύει τη μέση θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους. Αν υπάρχει ατμόσφαιρα που είναι όλη από άζωτο και οξυγόνο, η επιφάνεια είναι ακόμη η επιφάνεια του εδάφους, και T ακόμη η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους, ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία του αέρα. Αυτό είναι επειδή το άζωτο και το οξυγόνο είναι μη ακτινοβολούμενα (κυριολεκτικά $\varepsilon = 0$ για διαφανή και λευκά σώματα).



Σχήμα 6.1. Earth energy budget diagram

Πηγή: [Solomon et al., 2007]

Το Σχήμα 6.1 είναι ένα διάγραμμα που φαίνεται η εκτίμηση του ετήσιου και παγκόσμιου μέσου ενεργειακού ισοζυγίου της Γης. Εξετάζουμε την επιφανειακή ακτινοβολία $390W/m^2$ που εξέρχεται από την επιφάνεια του εδάφους η οποία θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε εκπομπή μέλανος σώματος, στους $15^\circ C$ σύμφωνα με την εξίσωση Stefan-Boltzmann (6.24):

$$I = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (273,15 + 15)^4 = 390,89 \simeq 390W/m^2. \quad (6.27)$$

Η ικανότητα εκπομπής της επιφάνειας του εδάφους, είναι απίθανο να πλησιάζει το 1.0. Μέλαν σώμα είναι μια αφαίρεση μιας φυσικής έννοιας, σχεδόν καμία ουσία δεν είναι

μέλαν σώμα στη Γή. Μπορεί κανείς εύκολα να καταλάβει γιατί η επιφάνεια του εδάφους της γης δεν θα απορροφούσε πλήρως τα $324W/m^2$ της ακτινοβολίας γιατί δεν είναι ποτέ, η επιφάνεια μέλανος σώματος. [\[K.E and Fasullo, 2011\]](#)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ο νόμος του Planck για την ακτινοβολία

Υστερα από διάφορους υπολογισμούς και δοκιμές στον τρόπο που με τον οποίο θα ερμηνευτεί η ακτινοβολία μέλανος σώματος, έρχεται ο Planck και εισάγει την έννοια του αρμονικού ταλαντωτή. Χωρίζει την ενέργεια σε κβάντα και αποδεικνύει με τον δικό του τρόπο το φαινόμενο του μέλανος σώματος, όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο. Ο Planck απέδειξε την σχέση μέσης ενέργειας βασιζόμενος στην Κλασική Θερμοδυναμική και στη Στατιστική Μηχανική. Κατάφερε να εξηγήσει την απόκλιση της μέσης ενέργειας από την κλασική τιμή της, χρησιμοποιώντας την Στατιστική Maxwell-Boltzmann. Εξήγησε τις διεγερμένες καταστάσεις του ταλαντωτή και πως γίνεται η μετάβαση από την μία ενεργειακή κατάσταση στην επόμενη μέσω ενός ενεργειακού διαγράμματος. Τέλος παρουσιάζουμε μια αρκετά αναλυτική απόδειξη της ακτινοβολίας του Planck.

7.1 Η προ Planck εποχή

Το 1859 ο Gustav Kirchhoff υποστήριξε ότι ένα μέλαν σώμα σε θερμική ισορροπία θα έπρεπε να εκπέμπει ένα φάσμα ακτινοβολίας που δεν έπρεπε να εξαρτάται από το σχήμα ή το υλικό του. Έτσι θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση $u(\nu, T)$ που περιγράφει τη φασματική ενεργειακή πυκνότητα σε θερμοκρασία T που βρίσκεται στο διάστημα συχνοτήτων από ν σε $\nu + d\nu$. Με βάση τις γενικές θερμοδυναμικές εκτιμήσεις ο Wilhelm Wien έδειξε το 1893 ότι αυτή η συνάρτηση δύο μεταβλητών, θα έπρεπε να έχει τη μορφή

$$u(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

που δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο νόμος μετατόπισης του Wien. Δηλαδή το "πρόβλημα ακτινοβολίας" μετατράπηκε σε προσδιορισμό μιας συνάρτησης f μιας μόνο μεταβλητής. Ο Wien παρουσίασε μια συνάρτηση που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση, τον περίφημο "νόμο ακτινοβολίας του Wien".

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} b \cdot \exp\left(-\frac{a\nu}{T}\right) \quad (7.1)$$

Το σημείο εκκίνησης του Planck ήταν να μοντελοποιήσει το μέλαν σώμα ως ένα σύνολο φορτισμένων ταλαντωτών. Με βάση την ηλεκτροδυναμική μπορούσε να δείξει ότι η φασματική ενεργειακή πυκνότητα σχετίζεται με τον χρονικό μέσο όρο της ενέργειας του ταλαντωτή $E(\nu, T)$, σύμφωνα με:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} b \cdot E(\nu, T) \quad (7.2)$$

Είναι σημαντικό ότι αυτή η σχέση δεν περιέχει τη μάζα, το φορτίο ή τον παράγοντα απόσβεσης των υποθετικών ταλαντωτών. Η στρατηγική του Planck ήταν να προσδιορίσει την εντροπία του ταλαντωτή, $S(E, \nu)$ και να ενσωματώσει τη θερμοδυναμική σχέση:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$$

Τον Οκτώβριο του 1900 πρότεινε τον νόμο ακτινοβολίας του :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{b\nu}{\exp\left(\frac{a\nu}{T}\right) - 1} \quad (7.3)$$

Οι παράμετροι a και b είναι ίδιοι όπως στην εξίσωση (7.1). Για τις υψηλές συχνότητες αυτή η έκφραση προσεγγίζει το νόμο της Wien ενώ για τις χαμηλές συχνότητες ακολουθεί ο

λεγόμενος νόμος Rayleigh-Jeans (Για $N = \frac{a}{b}R$) :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{R}{N}T. \quad (7.4)$$

Εδώ, το N υποδηλώνει τη σταθερά του Avogadro και το R την παγκόσμια σταθερά των αερίου ($k = \frac{R}{N}$). Ο νόμος της ακτινοβολίας Rayleigh-Jeans προκύπτει από το Θεώρημα ισοκατανομής της στατιστικής μηχανικής, δηλαδή εισάγοντας την $E = kT$ στην εξίσωση (7.2). Επίσης εφάρμοσε την έννοια της εντροπίας ως

$$S = k \ln W$$

με W την πιθανότητα της αντίστοιχης κατάστασης. Έτσι, ο Planck ουσιαστικά έπρεπε να μετρήσει τις δυνατότητες κατανομής της συνολικής ενέργειας E μεταξύ των N ταλαντωτών. Για τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους η ενέργεια P και τα στοιχεία ϵ θα μπορούσαν να κατανεμηθούν στους N ταλαντωτές πρόσφερε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$W = \frac{(P + N - 1)!}{P!(N - 1)!} \quad (7.5)$$

Ο Planck μόλις παρέθεσε αυτή τη σχέση το 1914 (δημοσιεύτηκε ένα χρόνο αργότερα) ο Paul Ehrenfest και ο Heike Kamerlingh Onnes έδωσαν μια όμορφη και απλή απόδειξη. Έτσι ο Planck έριξε το -1 στα παραγοντικά, χρησιμοποίησε την προσέγγιση $N! \simeq N^N$ και υπολόγισε την εντροπία $S = k \ln W$, ώστε να προκύψει ο νόμος της ακτινοβολίας:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \cdot \frac{\epsilon}{\exp\left(\frac{\epsilon}{kT}\right) - 1}, \quad (7.6)$$

αν $\epsilon \rightarrow 0$ (όπως έκανε ο Boltzmann το 1877) δεν θα έδινε το επιθυμητό αποτέλεσμα (7.3). Επιπλέον, η φασματική ενεργειακή πυκνότητα (7.6) είναι συνάρτηση του $\left(\frac{\epsilon}{T}\right)$, ενώ ο νόμος μετατόπισης του Wien απαιτεί να είναι συνάρτηση του $\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Ως εκ τούτου, τα ενεργειακά στοιχεία πρέπει να είναι ανάλογα με τη συχνότητα και τη σχέση του Planck:

$$\epsilon = h\nu, \quad (7.7)$$

οπότε ο νόμος του Planck, περιγράφεται από την σχέση:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (7.8)$$

[Passon and Grebe-Ellis, 2017]

7.2 Τι είναι ο κβαντισμένος ταλαντωτής

Η νέα και ριζική υπόθεση του Planck ήταν ότι, ένας ταλαντωτής στα τοιχώματα της κοιλότητας μπορούσε να εκπέμπει ή να απορροφά ενέργεια μόνο σε κομμάτια (κβάντα) και ότι το μέγεθος των κβάντα ήταν ανάλογο με τη συχνότητα του ταλαντωτή. Εάν ο ταλαντωτής λειτουργεί σε μια συχνότητα, το μέγεθος του κβάντου της ενέργειας του είναι $h\nu$, όπου h μια μικρή σταθερά την οποία ο Planck δεν γνώριζε αρχικά, που πρέπει να εκφράζεται σε μονάδες ενέργειας επί χρόνο. Αν αυτός ο ταλαντωτής συχνότητας ν πρόκειται να δεχθεί ενέργεια από την κοιλότητα, μπορεί να δεχτεί μόνο ένα κβαντικό ποσό, το ποσό $h\nu$. Ο ταλαντωτής δεν μπορεί σύμφωνα με την υπόθεση του Planck να κερδίσει ή να χάσει ενέργεια εκτός από αυτή την ποσότητα. Η υπόθεση του Planck για τους κβαντισμένους ταλαντωτές είχε σημαντική επίδραση στη κατανομή ακτινοβολούμενης ενέργειας στην κοιλότητα. Αυτό θα γίνει πιο κατανοητό αν υποθέσουμε ότι, η συχνότητα στην κοιλότητα είναι ν και ότι σε κάποιο σύντομο χρονικό διάστημα $6h\nu$ ενέργειας, διατίθεται από τα πηνία θέρμανσης. Αυτή η ενέργεια μπορεί να διεγείρει ταλαντωτές στα τοιχώματα της κοιλότητας με διάφορους τρόπους, όπως:

- Έξι ταλαντωτές στη θεμελιώδη συχνότητα ν θα μπορούσαν να απορροφήσουν ένα κβάντο ενέργειας, $h\nu$. Στη συνέχεια, το καθένα θα ενεργοποιείται στη βασική λειτουργία και θα παρέχει αυτή την ενέργεια στην ακτινοβολία της κοιλότητας. Άρα έχει υπολογιστεί όλη η ενέργεια έξι ταλαντωτών που απέκτησε ο καθένας $h\nu$ ενέργεια, σε μορφή εξίσωσης:

$$6 \cdot 1h\nu = 6h\nu$$

- Η τέσσερις ταλαντωτές στη θεμελιώδη συχνότητα ν , μπορεί ο καθένας να απορροφά ένα κβάντο, ενώ ένας πέμπτος ταλαντωτής στη δεύτερη αρμονική ταλάντωση (2ν) απορροφά τις υπόλοιπες $2h\nu$ ενέργειας. Η ενέργεια που είναι διαθέσιμη στην κοιλότητα παίρνει τη μορφή τεσσάρων κβάντων στη συχνότητα ν και ένα κβάντο στη συχνότητα 2ν . Η εξίσωση είναι:

$$4 \cdot 1h\nu + 1 \cdot 2h\nu = 6h\nu$$

- Η ένας ταλαντωτής μπορεί να διεγείρεται στη θεμελιώδη συχνότητα ν ένας ταλαντωτής στη δεύτερη αρμονική ταλάντωση και ένας ταλαντωτής στη συχνότητα

3ν . Τότε η κοιλότητα λαμβάνει ενέργεια $h\nu$ στη συχνότητα ν , $2h\nu$ στην συχνότητα 2ν και $3h\nu$ στη συχνότητα 3ν , όπως φαίνεται στην εξίσωση:

$$1 \cdot 1h\nu + 2 \cdot 2h\nu + 3 \cdot 3h\nu = 6h\nu$$

Επομένως για να αλληλεπιδράσουν τα κβάντα και οι ταλαντωτές πρέπει:

- Η συνολική ενέργεια που παρέχεται από τα πηνία θέρμανσης, πρέπει να ισούται με την ποσότητα που απορροφάται από τους διάφορους ταλαντωτές και επίσης ισούται με την συνολική ποσότητα που απελευθερώνεται από αυτούς τους ταλαντωτές στην κοιλότητα.
- Ένας ταλαντωτής σε συχνότητα ν μπορεί να δεχθεί ή να απελευθερώσει μόνο την ενέργεια του $h\nu$.

Μπορούμε λοιπόν να δούμε ότι η υπόθεση του Planck εμποδίζει τις υψηλές συχνότητες να κυριαρχήσουν. Όπως είχαμε δει ήταν οι τρόποι λειτουργίας υψηλής συχνότητας (μικρό μήκος κύματος, μεγάλη συχνότητα ν), που ο καθένας απαιτούσε το ίδιο μερίδιο ενέργειας και έτσι προκάλεσαν την καταστροφή της υπεριώδους ακτινοβολίας στην θερμοδυναμική. [Gupta, 2003]

7.3 Απόδειξη του νόμου Planck

Ο Planck αναγκάστηκε ουσιαστικά να εισαγάγει την έννοια του resonator ("ταλαντωτής") που έχει διακεκριμένες (δηλαδή όχι συνεχείς αλλά εξαρτώμενες από έναν φυσικό αριθμό n , με άλλα λόγια "κβαντισμένες") επιτρεπόμενες ενέργειες E_n για δεδομένη συχνότητα ν και κατόπιν να υποθέσει ότι η ενέργεια που ατιστοιχεί σε δεδομένη συχνότητα ν και θερμοκρασία T είναι στην πραγματικότητα μια μέση τιμή $\overline{E(\nu, T)}$ των ενεργειών ενός μεγάλου αριθμού ταυτοσήμων resonators που ο καθένας βρίσκεται σε μια διαφορετική στάθμη E_n , ενώ η πιθανότητα καταλήψεως της στάθμης P_n δίνεται από τη στατιστική Boltzmann. Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ενός resonator συχνότητας ν εντός της κοιλότητας μέλανος σώματος μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές και μάλιστα έχει τη μορφή

$$E_n = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (7.9)$$

Από το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, έτσι και εδώ θα υποθέσουμε ότι η μέση τιμή της ενέργειας κανονικού τρόπου εξαρτάται από τη θερμοκρασία αλλά και από τη συχνότητα

$$\overline{E(\nu, T)} = \sum_n E_n p_n \quad (7.10)$$

όπου ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να βρίσκεται ο δομικός λίθος στην ενέργεια E_n είναι E_p και αυτή δίνεται από την στατιστική κατανομή Boltzmann, δηλαδή

$$p_n = \frac{e^{\frac{-E_n}{k_B T}}}{Z} \quad (7.11)$$

$$Z = \sum_n e^{\frac{-E_n}{k_B T}} \quad (7.12)$$

όπου Z η συνάρτηση επιμερισμού. Ας ορίσουμε

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \quad (7.13)$$

Άρα έχουμε

$$\overline{E(\nu, T)} = \sum_n n k_B T \frac{e^{-nx}}{Z} = \frac{k_B T x}{Z} \sum_n n e^{-nx} \quad (7.14)$$

$$Z = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (7.15)$$

διότι πρόκειται για άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου $a_n = e^{-nx}$ με αρχικό όρο $a_0 = e^{-0x} = 1$ και λόγο $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$.

Απο την εξίσωση (75) προκύπτει

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = - \sum_n n e^{-nx} = - \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \Rightarrow \quad (7.16)$$

$$A = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad (7.17)$$

Απο τις εξισώσεις (74),(75),(77) προκύπτει

$$\overline{E(\nu, T)} = k_B T x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = k_B T x \frac{1}{e^x - 1} \quad (7.18)$$

και αν θυμηθούμε πως ορίστηκε το χ στην εξίσωση (73) καταλήγουμε ότι

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (7.19)$$

όπου τώρα το $\overline{E(\nu, T)}$ εξαρτάται και από τη συχνότητα ν και μάλιστα δίνεται από την εξίσωση (79) άρα

$$u(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (7.20)$$

η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας HM ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία $u(\nu, T)$ είναι

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (7.21)$$

[Σιμσερίδης, 2015]

- Για $h\nu \gg kT$, τότε παίρνουμε τον νόμο των Rayleigh-Jeans.
- Για $h\nu \ll kT$, τότε παίρνουμε τον νόμο μετατόπισης του Wien.

[Βοσνιάκος, 1980]

7.4 Η συνάρτηση Planck στο εύρος συχνοτήτων

Ένα παράδειγμα τέλει ακτινοβολίας μέλανος σώματος είναι το Hohlraumstrahlung που περιγράφει την ακτινοβολία σε μια κοιλότητα που οριοθετείται από αδιαφανείς ουσίες που εκπέμπουν και απορροφούν θερμικρά. Σύμφωνα με τα ευρήματα του Kirchhoff[22], η κατάσταση της θερμικής ακτινοβολίας σε τέτοια κοιλότητα είναι εντελώς ανεξάρτητη από τη φύση και τις ιδιότητες αυτών των ουσιών και εξαρτάται μόνο από την απόλυτη θερμοκρασία, T , και τη συχνότητα ν (ή την ακτινική συχνότητα $\omega = 2\pi\nu$) ή το μήκος κύματος λ . Η ακτινοβολία που κυμαίνεται από ν έως $\nu + d\nu$ συμβάλλει στο ενεργειακό εύρος ν μέσα σε έναν όγκο dV , κατά μέσο όρο, μια ποσότητα ενέργειας που είναι ανάλογη των $d\nu$ και dV εκφράζεται με:

$$dE = U(\nu, T) d\nu dV = U(\omega, T) d\omega dV, \quad (7.22)$$

η ποσότητα $U(\nu, T)$ (ή $U(\omega, T)$) ονομάζεται μονοχρωματική (ή φασματική) πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας. Σύμφωνα με τον Planck, στην περίπτωση της θερμικής ισορροπίας, μπορεί να σχετίζεται με τη μέση ενέργεια, $\overline{E}$, ενός αρμονικού ταλαντωτή της συχνότητας ν που βρίσκεται μέσα στα τοιχώματα της κοιλότητας από:

$$U(\nu, T) = A\overline{E} \quad (7.23)$$

όπου A είναι μια σταθερά. Στην περίπτωση της θερμικής ισορροπίας, η πιθανότητα $P(E_j)$ να ανιχνευτεί μια στατική κατάσταση με ενέργεια, E_j δίνεται από :

$$P(E_j) = \alpha g_j e^{\frac{-E_j}{kT}}, \quad (7.24)$$

όπου το α είναι μια σταθερά, g_j είναι ο αριθμός των στατικών καταστάσεων (εκφυλισμός) και $k = 1,3806 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$ είναι η σταθερά Boltzmann. Αντανακλά τη σύνδεση του Boltzmann μεταξύ εντροπίας και πιθανότητας. Η πιθανότητα ένας αρμονικός ταλαντωτής, να καταλαμβάνει ενέργεια, E_n , εκφράζεται τον τύπο του Boltzmann:

$$P_n = P(E_n) = C e^{\frac{-E_n}{kT}}, \quad (7.25)$$

όπου C μια άλλη σταθερά. Ο Planck υπέθεσε ότι ένας τέτοιος ταλαντωτής μπορεί να έχει μόνο την ποσότητα ενέργειας [Kramm and Mölders, 2009]:

$$E_n = nh\nu = n\hbar\omega \quad (7.26)$$

που σημαίνει ότι η ενέργεια είναι κβαντισμένη. Από την ιστορική σκοπιά αυτό το αξίωμα μπορεί να θεωρηθεί ως η έναρξη της κβαντικής φυσικής [Kramm and Mölders, 1000] .

Εδώ ο $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ είναι ένας ακέραιος, ο λεγόμενος κύριος κβαντικός αριθμός, το $h = 6,625 \cdot 10^{-34} Js$ είναι η σταθερά του Planck και $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ονομάζεται συνήθως σταθερά Dirac. Ο Planck υπέθεσε ότι η ενέργεια ενός ταλαντωτή στην κατάσταση για $n = 0$ ισούται με μηδέν. Σήμερα όμως, γνωρίζουμε ότι για $n = 0$, η μηδενική ενέργεια δίνεται από

$$E_0 = \frac{1}{2}h\nu$$

και η εξίσωση (7.26) γράφεται ως εξής:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega . \quad (7.27)$$

Επιπλέον, υπέθεσε ότι τα κβάντα ενέργειας εκπέμπονται μόνο όταν ένας ταλαντωτής αλ-
λάζει από τη μια στην άλλη από τις κβαντισμένες ενεργειακές του καταστάσεις σύμφωνα
με το $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ για $n = 0, 1, 2, \dots$. Προφανώς, η σταθερά C που εμφανίζεται
στην Εξίσωση (7.25) μπορεί να προσδιοριστεί από την προϋπόθεση ότι το άθροισμα όλων
των πιθανοτήτων πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) = C \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) = 1 \quad (7.28)$$

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} \quad (7.29)$$

Τώρα, θεωρούμε ότι το σύστημά μας αποτελείται από πολλούς ταλαντωτές που ο καθένας
έχει συχνότητας ν . Μερικοί από αυτούς τους ταλαντωτές, όπως ο N_0 , θα βρίσκονται στη
θεμελιώδη κατάσταση ($n = 0$), ο N_1 θα είναι στην επόμενη υψηλότερη ($n = 1$) και ούτω
καθεξής. Έτσι στο n επίπεδο ενέργειας, έχουμε μια ποσότητα ενέργειας

$$\epsilon_n = E_n N_n .$$

Ο αριθμός των αρμονικών ταλαντωτών που καταλαμβάνει ένα επίπεδο ενέργειας σχετίζεται
με την αντίστοιχη πιθανότητα,

$$N_n = N P_n(E_n) ,$$

οπότε

$$\epsilon_n = E_n N_n = E_n N C \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) = \frac{E_n N \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} \quad (7.30)$$

Σύμφωνα με την επόμενη σχέση,

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} N_n = \sum_{n=0}^{\infty} N C \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) = N \sum_{n=0}^{\infty} C \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) = N , \quad (7.31)$$

μπορούμε να πούμε ότι N είναι ο συνολικός αριθμός των αρμονικών ταλαντωτών. Στη συνέχεια δίνεται η συνολική ενέργεια,

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n = \frac{N \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} \quad (7.32)$$

αυτή την εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέση ενέργεια ανά ταλαντωτή σε θερμική ισορροπία όπως αναφέρθηκε στην εξίσωση (7.23), δίνεται από:

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} \quad (7.33)$$

Για απλότητα ορίζουμε μέγεθος Z που ονομάζεται συνάρτηση επιμερισμού (partition function)

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (7.34)$$

Αν παραγωγίσουμε το Z ως προς T βρίσκουμε ότι,

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \cdot \left(-\frac{E_n}{kT^2}\right) = \frac{1}{kT^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \quad (7.35)$$

ή

$$kT^2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (7.36)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (7.33) και (7.36) βρίσκουμε ότι

$$\bar{E} = kT^2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z). \quad (7.37)$$

Καθώς το E_n είναι κβαντισμένο, εξίσωση (7.26), παίρνουμε

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)^n \quad (7.38)$$

Μπορούμε να ορίσουμε,

$$x = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right),$$

και τότε έχουμε ότι

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (7.39)$$

είναι μια γεωμετρική σειρά. Για $0 \leq x < 1$ το άθροισμα δίνεται από τη σχέση,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}. \quad (7.40)$$

Εισάγοντας αυτήν την σχέση στην εξίσωση (7.37) αποδεικνύουμε ότι,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z) \\ &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right) \right) \\ &= -kT^2 \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} \cdot \left(-\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \left(\frac{h\nu}{kT^2} \right) \right) \\ &= \frac{h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (7.41)$$

εισάγοντας αυτή την εξίσωση στην εξίσωση (7.23) παίρνουμε,

$$U(\nu, T) = A \frac{h\nu}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (7.42)$$

Οπότε τελικά προκύπτει η σχέση,

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (7.43)$$

που ονομάζεται κατανομή Planck. Τώρα, πρέπει να προσδιορίσουμε τη σταθερά A . Μπορεί να βρεθεί από τον κλασικό νόμος ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \quad (7.44)$$

όπου $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Αυτός ο νόμος ακτινοβολίας προήλθε για πρώτη φορά από τον Rayleigh χρησιμοποιώντας αρχές της κλασικής στατιστικής, με μια διόρθωση από τον Jeans και είναι γνωστός σήμερα ως νόμος των Rayleigh – Jeans. Αυτός ο κλασικός νόμος της ακτινοβολίας πληροί τόσο τα ευρήματα του Kirchhoff σχετικά με την κατάσταση της θερμικής ακτινοβολία σε μια κοιλότητα όσο και τις απαιτήσεις του νόμου μετατόπισης του Wien που λέει ότι:

$$U(\nu, T) \propto \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (7.45)$$

Για μικρές συχνότητες σε σχετικά υψηλή θερμοκρασία η σχέση αυτή ικανοποιείται. Όμως ο νόμος Rayleigh – Jeans δεν μπορεί να ισχύει για υψηλές συχνότητες ν , επειδή για $\nu \rightarrow \infty$ η μονοχρωματική ενεργειακή πυκνότητα $U(\nu, T)$ τείνει στο άπειρο.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τον τύπο του Planck στο κόκκινο εύρος για τον οποίο ο νόμος Jeans ισχύει.

Για $\nu \rightarrow 0$ η εξίσωση (7.43) γίνεται

$$U(\nu, T) \rightarrow \frac{0}{0}$$

Άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l' Hospital.

Για

$$f(\nu) = Ah\nu,$$

και

$$g(\nu) = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right),$$

παίρνουμε:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{f'(\nu)}{g'(\nu)} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{Ah}{\frac{h}{kT} \exp(\frac{h\nu}{kT})} = AkT . \quad (7.46)$$

Οπότε, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.45) και (7.46) βρίσκουμε τελικά ότι,

$$A = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} . \quad (7.47)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή στην εξίσωση (7.43) προκύπτει τελικά ότι

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} \quad (7.48)$$

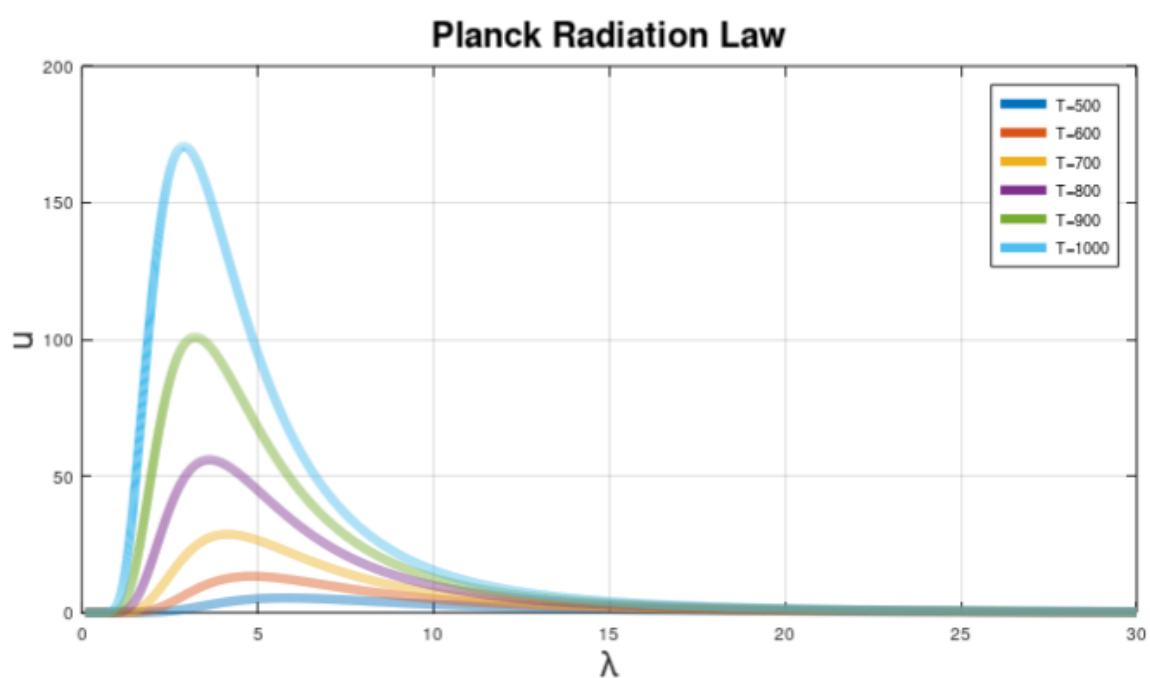
Κατά συνέπεια η εξίσωση (7.22) μπορεί να γραφεί ως,

$$dE = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu dV , \quad (7.49)$$

ή

$$dE = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} d\omega dV \quad (7.50)$$

Για την παρουσίαση της παραπάνω ανάλυσης χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία που παρουσιάζεται στις αναφορές [Σιμσερίδης, 2015] , [Salasnich, 2014]



Σχήμα 7.1. Νόμος του Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος για έξι θερμοκρασίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συμπεράσματα

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να προσεγγίσουμε την ακτινοβολία του μέλανος σώματος με την βοήθεια της Σύγχρονης Φυσικής. Στο πρώτο κεφάλαιο έγινε αναλυτική περιγραφή πως από την Κλασική Φυσική περάσαμε στη Σύγχρονη Φυσική. Σε μια εποχή που οι θεωρίες της Κλασικής Φυσικής και άλλων επιστημών δεν επαρκούσαν στο να εξηγήσουν κάποια πειραματικά αποτελέσματα που προέκυπταν. Επομένως μιλάμε για την επανάσταση της Κβαντικής Φυσικής. Στη συνέχεια έγινε αναφορά στην έννοια της θερμικής ακτινοβολίας και πως αυτή εκπέμπεται και απορροφάται από επιφάνειες. Πιο συγκεκριμένα μελετήσαμε την ακτινοβολία ενός μέλανος σώματος, όπου για να γίνει πιο κατανοητό, επινοήσαμε ένα πρότυπο αυτού. Στο σώμα αυτό ανοίξαμε μια μικρή οπή και είδαμε πως συμπεριφέρεται η ακτινοβολία στην κοιλότητα σε σχέση με την εξωτερική επιφάνεια του σώματος. Αυτό το φαινόμενο το προσεγγίσαμε με κάποιους εμπειρικούς νόμους. Αρχικά οι Rayleigh–Jeans οδηγήθηκαν σε αδιέξοδο που ονομάστηκε "υπεριώδης καταστροφή", όταν μελέτησαν την ακτινοβολία για υψηλές συχνότητες. Μια δεύτερη προσέγγιση τους ήταν να εξετάσουν τα ταλαντευόμενα ηλεκτρόνια στην κοιλότητα. Επομένως μελέτησαν το ηλεκτρικό πεδίο και τα στάσιμα κύματα που σχηματίζονται, με την χρήση της τρισδιάστατης εξίσωσης κύματος. Έπειτα υπολογίσαμε με το πρόγραμμα octave την συμπεριφορά αυτών των στάσιμων κυμάτων μεταξύ δύο τοιχωμάτων. Στη συνέχεια μια ακόμη προσπάθεια για να εξαχθεί ο νόμος, έγινε από τον Wien. Το πρόβλημα προέκυψε όταν στον νόμο εφάρμοσε μεγάλες συχνότητες. Επόμενη προσπάθεια έγινε από τους Stefan–Boltzmann. Στο τέλος γνωρίζοντας όλες τις απόπειρες των παραπάνω ερευνητών, ο Planck θεώρησε πως για να εξετάσει την ακτινοβολία έπρεπε να μοιράσει

την ενέργεια σε κβάντα, να μελετήσει δηλαδή τα ενεργειακά επίπεδα ενός κβαντισμένου ταλαντωτή. Ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα της εργασίας είναι οι κβαντικές καταστάσεις του ταλαντωτή. Ένας ταλαντωτής στην θεμελιώδη του κατάσταση, δηλαδή σε εκείνη που έχει την χαμηλότερη δυνατή ενέργεια δεν ακτινοβολεί, επειδή δεν μπορεί να πάει σε πιο χαμηλή ενεργειακή κατάσταση. Οι κβαντικές καταστάσεις όπου ο κύριος κβαντικός αριθμός n , είναι μεγαλύτερος του μηδενός, λέγονται διεγερμένες καταστάσεις και έχουν ενέργειες μεγαλύτερες από την ενέργεια της θεμελιώδης κατάστασης. Σε αντίθεση με την σταθερή κατάσταση αυτής της θεμελιώδης κατάστασης, οι διεγερμένες καταστάσεις, μεταπίπτουν σε χαμηλότερη ενέργεια. Η ενέργεια που απελευθερώνονται κατά την αποδιέγερση, αποδίδεται στο περιβάλλον με μορφή φωτονίων. Εν τέλει ένας ταλαντωτής που βρίσκεται στη θεμελιώδη αρχική κατάσταση, δεν συνεισφέρει στο φάσμα ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Ένα ακόμη συμπέρασμα είναι πως για να ταιριάζει η θεωρητική με την πειραματική κατανομή θα πρέπει η μέση τιμή $\bar{E}$, να μηδενίζεται στις μεγάλες συχνότητες, ώστε να έχουμε το όριο της $\bar{E}$ να τείνει στο μηδέν. Όμως για χαμηλές συχνότητες η μέση ενέργεια θα πρέπει να τείνει στην κλασική τιμή της $k_B T$ και η κλασική συνάρτηση θα συμπίπτει με την πειραματική καμπύλη, κάτι που εκφράζει τη λεγόμενη την Αρχή της Αντιστοιχίας.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε τον κώδικα σε octave που χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τα στάσιμο κύμα στην κυβική κοιλότητα. Ο κώδικας που δίνεται παρακάτω, χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευάσουμε το Σχήμα [4.3](#).

```
x=[-1:0.001:1];

pi=3.14159

y1=sin(pi*x);
y2=sin(2*pi*x);
y3=sin(3*pi*x);
y4=sin(4*pi*x);

plot(x,y1,'r',x,y2,'b',x,y3,'g',x,y4,'k')
grid on;
axis ([0 1.01 -1.1 1.1])
legend ("k=1","k=2","k=3","k=4","location", "southwest")
```

Παράρτημα Β

Ακολουθεί ο κώδικας σε octave που περιγράφει τον νόμο του Wien και του Planck για κάποιες θερμοκρασίες μέλανος σώματος. Ο συγκεκριμένος κώδικας χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευάσουμε το Σχήμα 5.1.

```
x1=0;
xr=5000;
ekth=2001;
step=(xr-x1)/(ekth-1);
for j=1:3
    T(j)=3000+j*500
    lambda0(j)=2897772/T(j)
for i=1:ekth;
    x(i)=x1+step*(i-1);
    x(i)=x(i)*1e-9;
    c1=499.24825e-26;    %c1=8πhc
    c2=14.38777e-3 ;    %hc/k_B
    u(i,j)=c1/(x(i)^5);
    u1(i,j)=u(i,j)/(exp(c2/(x(i)*T(j)))-1);
    u2(i,j)=u(i,j).*(exp(-c2/(T(j)*x(i))));
end
end
figure(1);
title('Blackbody Radiation')
xlabel('\lambda')
ylabel('Intensity')
hold on
plot(x,u1(:,1),'r','linewidth',3,x,u1(:,2),'b',
'linewidth',3,x,u1(:,3),'r','linewidth',3)
plot(x,u2(:,1),'b','linewidth',2,x,u2(:,2),'b',
'linewidth',2,x,u2(:,3),'b','linewidth',2)
text(.67e-6,65000,'3500K','fontsize',14)
```

```
text(.55e-6,120000,'4000K','fontsize',14)
text(.45e-6,200000,'4500K','fontsize',14)
legend('Planck's Law','Wien's Law')
hold off
grid
```

Παράρτημα Γ

Ακολουθεί ο κώδικας σε octave που περιγράφει τον νόμο του Planck για έξι θερμοκρασίες μέλανος σώματος. Ο συγκεκριμένος κώδικας χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευάσουμε το Σχήμα 7.1.

```
%plot Planck Radiation Laws
clc;
h=6.626e-34;kb=1.38e-23;c=3e8;
T=500:100:1000;
To=1000;
Wu=0.1:0.005:30;
W=Wu.*10^-6;
A=(8*3.14*h*c);
for j=1:length(T)
    for i=1:length(W)
        up(j,i)=(A/W(i)^5)/(exp((h*c)/(kb*T(j)*W(i)))-1);
        ur(i,j)=8*3.14*kb*T(j)/(W(i)^4);
        uw(j,i)=(A/W(i)^5)*exp(-(h*c)/(kb*T(j)*W(i)));
    endfor
    if T(j)=To
        q=j;
    endif
endfor

%Plot Planck's Law
subplot(2,2,1)
plot(Wu',up','linewidth',3);
legend("T=500","T=600","T=700","T=800","T=900","T=1000");
xlabel('\lambda(\mu m)','fontsize',20);
ylabel('u(\lambda)','fontsize',20);
title('Planck Radiation Law','fontsize',20);
grid on
```

Παράρτημα Δ

Ακολουθεί ο κώδικας σε octave που περιγράφει την υπεριώδη καταστροφή για έξι θερμοκρασίες μέλανος σώματος. Ο συγκεκριμένος κώδικας χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευαστεί το Σχήμα 4.1.

```
clc;
h=6.626e-34;kb=1.38e-23;c=3e8;
T=500:100:1000;
To=1000;
Wu=0.1:0.005:30;
W=Wu.*10^-6;
A=(8*3.14*h*c);
for j=1:length(T)
    for i=1:length(W)
        up(j,i)=(A/W(i)^5)/(exp((h*c)/(kb*T(j)*W(i)))-1);
        ur(i,j)=8*3.14*kb*T(j)/(W(i)^4);
        uw(j,i)=(A/W(i)^5)*exp(-(h*c)/(kb*T(j)*W(i)));
    endfor
    if T(j)=To
        q=j;
    endif
endfor
plot(Wu,ur,'linewidth',2);
axis([0 30 0 200])
legend("T=500","T=600","T=700","T=800","T=900","T=1000",
'Location','southeast','NumColumns',5);
title('Ultraviolet catastrophe - Rayleigh-Jeans law',
'fontsize',20,'Position',[15,150,0]);
xlabel('\nu','fontsize',25);
ylabel('u(\nu)','fontsize',25);
grid on
```

Παράρτημα Ε

Ακολουθεί ο κώδικας σε octave που περιγράφει την ακτινοβολία μέλανος σώματος. Ο συγκεκριμένος κώδικας χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευάσουμε το Σχήμα 3.2.

```
x1=0;
xr=5000;
ekth=2001;
step=(xr-x1)/(ekth-1);
for j=1:4
    T(j)=3000+j*500
    lambda0(j)=2897772/T(j)
for i=1:ekth;
    x(i)=x1+step*(i-1);
    x(i)=x(i)*1e-9;
    c1=499.24825e-26;    %c1=8πhc
    c2=14.38777e-3 ;    %hc/k_B
    u(i,j)=c1/(x(i)^5);
    u1(i,j)=u(i,j)/(exp(c2/(x(i)*T(j)))-1);
end
end
figure(1);
title('Blackbody Radiation','fontsize',20)
xlabel('\lambda','fontsize',20)
ylabel('Intensity','fontsize',20)
hold on
plot(x,u1(:,1),'r','linewidth',3,x,u1(:,2),'b',
'linewidth',3,x,u1(:,3),'y','linewidth',3,x,u1(:,4),
'g','linewidth',3)
legend("T=3500","T=4000","T=4500","T=5000")
hold off
grid
```

Αναφορές – Βιβλιογραφία

- [Atkins et al., 2014] Atkins, P., Atkins, P. W., and de Paula, J. (2014). *Atkins' physical chemistry*. Oxford University Press.
- [Bityukov et al., 2018] Bityukov, V., Khudak, Y., and Gusein-zade, N. (2018). Analytical derivation of the Stefan and Boltzmann Law for integral radiance from Planck's Law for spectral radiance.
- [Bonacci, 2021] Bonacci, E. (2021). On teaching quantum physics at high school. arxiv: 2109.00887.
- [Bowley and Sanchez, 1999] Bowley, R. and Sanchez, M. (1999). *Introductory Statistical Mechanics*. Oxford University Press.
- [Einstein, 2011] Einstein, A. (2011). *Letters to Solovine, 1906- 1955*. Open Road Media.
- [Eisberg, 1995] Eisberg, R. (1995). *Θεμελιώδης Σύγχρονη Φυσική*. Εκδόσεις Πνευματικού.
- [Evans, 2013a] Evans, R. (2013a). Derivation of the Rayleigh-Jeans Law Part 1. <https://thecuriousastronomer.wordpress.com/2013/10/28/derivation-of-the-rayleigh-jeans-law-part1/>.
- [Evans, 2013b] Evans, R. (2013b). Derivation of the Rayleigh-Jeans Law Part 2. <https://thecuriousastronomer.wordpress.com/2013/11/04/derivation-of-the-rayleigh-jeans-law-part-2/>.
- [Evans, 2013c] Evans, R. (2013c). Derivation of the Rayleigh-Jeans Law Part 3. <https://thecuriousastronomer.wordpress.com/2013/11/12/derivation-of-the-rayleigh-jeans-law-part-3/>.

- [Flamm, 2008] Flamm, D. (2008). Ludwig Boltzmann a pioneer of modern physics.
- [Gupta, 2003] Gupta, S. (2003). Blackbody Radiation.
- [K.E and Fasullo, 2011] K.E, T. and Fasullo, J. T. (2011). Tracking earth's energy from El Nino to global warming.
- [Kragh, 2004] Kragh, H. (2004). *Matter and spirit in the universe: Scientific and religious preludes to modern cosmology*, volume 3. World Scientific.
- [Kramm and Mölders, 2009] Kramm, G. and Mölders, N. (2009). Planck's blackbody radiation law: Presentation in different domains and determination of the related dimensional constants. *arXiv preprint arXiv:0901.1863*.
- [Kramm and Mölders, 1000] Kramm, G. and Mölders, N. (1000). Planck's blackbody radiation law: Presentation in different domains and determination of the related dimensional constants.
- [Lummer and Pringsheim, 1897] Lummer, O. and Pringsheim, E. (1897). Die strahlung eines "schwarzen"körpers zwischen 100 und 1300° c . *Annalen der Physik*, 299(13):395–410.
- [McGee, 1988] McGee, T. D. (1988). *Principles and methods of temperature measurement*. John Wiley & Sons.
- [Passon and Grebe-Ellis, 2017] Passon, O. and Grebe-Ellis, J. (2017). Planck's radiation law, the light quantum, and the prehistory of indistinguishability in the teaching of quantum mechanics.
- [Perivolaropoulos, 2015] Perivolaropoulos, L. (2015). *Εισαγωγή στην Κβαντική Θεωρία*. Kallipos.
- [Petersen, 1963] Petersen, A. (1963). The Philosophy of Niels Bohr. *Bulletin of the atomic scientists*, 19(7):8–14.
- [Pfaffman, 2022] Pfaffman, S. G. (2022). Derivation and applications of wien's displacement law. https://www.spacefirst.org/uploads/7/9/1/7/79174470/derivation_and_applications_of_wien_s_displacement_law__2_.pdf.

- [Rovelli, 2005] Rovelli, C. (2005). Relational Quantum Mechanics. *Quo vadis quantum mechanics?*, pages 113–120.
- [Salasnich, 2014] Salasnich, L. (2014). *Quantum physics of light and matter: A modern introduction to photons, atoms and many-body systems*. Springer.
- [Salasnich, 2017] Salasnich, L. (2017). *Quantum Physics of Light and Matter*. Springer.
- [Serway et al., 2004] Serway, R. A., Moses, C. J., and Moyer, C. A. (2004). *Modern Physics*. Cengage Learning.
- [Solomon et al., 2007] Solomon, S., Qin, D., Manning, M., Chen, Z., Marquis, M., Averyt, K., Tignor, M., and Miller, H. (2007). Ipcc fourth assessment report (ar4). *Climate change*, 374.
- [Styer, 2000] Styer, D. F. (2000). *The strange world of quantum mechanics*. Cambridge University Press.
- [Velentzas et al., 2007] Velentzas, A., Halkia, K., and Skordoulis, C. (2007). Thought experiments in the theory of relativity and in quantum mechanics: Their presence in textbooks and in popular science books. *Science & Education*, 16:353–370.
- [Voices, 2022] Voices, E. (2022). The electromagnetic spectrum. <https://earthsky.org/space/what-is-the-electromagnetic-spectrum/>.
- [Wellons, 2007] Wellons, M. (2007). The Stefan–Boltzmann Law.
- [Zemansky, 2011] Zemansky, M. W. (2011). *Heat and Thermodynamics*. Tata McGraw Hill Education Private Limited.
- [Βοσνιάκος, 1980] Βοσνιάκος (1980). *Αρχές Μοντέρνας Φυσικής*. Εκδόσεις Διόσκουροι.
- [Σιμσερίδης, 2015] Σιμσερίδης (2015). *Κβαντική Οπτική και Lasers*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.
- [Τραχανάς, 2005] Τραχανάς (2005). *Κβαντομηχανική Ι*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.