ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΟΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕΙΚΤΗΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΔΙΕΠΙΠΕΔΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΠΑΠΑΕΥΣΤΑΘΙΟΥ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης (ΜΔΕ) στις

«Σύγχρονες Μεθόδους Σχεδιασμού και Ανάλυσης στη Βιομηχανία»

2016

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Δημήτριος Παντελής Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Γεώργιο Κοζανίδη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κ.κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο και Δημήτριο Παντελή για την ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του διδακτικού και διοικητικού προσωπικού, και τους συμφοιτητές μου του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας που με βοήθησαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΟΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕΙΚΤΗΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΔΙΕΠΙΠΕΔΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Χαράλαμπος Παπαευσταθίου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης,

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Περίληψη

Εξετάζεται η εφαρμογή ενός αλγόριθμου επίπεδων τομών (cutting-plane algorithm) που με την υιοθέτηση των κατάλληλων ισχύουσων ανισοτήτων (valid inequalities) επιλύει ένα μεικτό ακέραιο διεπίπεδο πρόβλημα. Στη διαδικασία επίλυσης που εξετάζεται χρησιμοποιούνται ισχύουσες ανισότητες στη χαλάρωση του προβλήματος, οι οποίες επιβάλλουν πρόσθετους περιορισμούς που καθορίζουν τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης που εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση του άνω επιπέδου. Η προσθήκη των ανισοτήτων αυτών βασίζεται στην παραμετρική επίλυση του άνω προβλήματος και οδηγεί στην ολικά βέλτιστη λύση του προβλήματος. Για την επίδειξη της εφαρμογής του μοντέλου χρησιμοποιείται το πρόβλημα της βέλτιστης υποβολής προσφορών παραγωγών σε αγορές ημερήσιου προγραμματισμού ηλεκτρικής ενέργειας που είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μεικτού ακέραιου διεπίπεδου προγραμματισμού. Η παραμετρική επίλυση του προβλήματος του άνω επιπέδου για δεδομένες τιμές των μεταβλητών απόφασης μας δίνει τα υπό συνθήκη βέλτιστα της αντικειμενικής συνάρτησης του άνω επιπέδου. Παρουσιάζεται η ανάπτυξη των κατάλληλων επίπεδων τομών για τις τιμές αυτές σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα και εξετάζονται τα αποτελέσματα.

Λέξεις Κλειδιά: Μεικτός ακέραιος διεπίπεδος προγραμματισμός, επίπεδες τομές, ισχύουσες ανισότητες, βέλτιστη υποβολή προσφορών, αγορές ηλεκτρικής ενέργειας.

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της εργασίας

Ο μεικτός ακέραιος διεπίπεδος προγραμματισμός (mixed integer bilevel programming) είναι ένας τομέας της βελτιστοποίησης όπου το σύνολο των εφικτών λύσεων του βασικού προβλήματος (άνω επιπέδου- upper level) καθορίζεται από ένα δευτερεύον πρόβλημα (κάτω επιπέδου- lower level). Μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διμερές πρόβλημα όπου οι δύο υπεύθυνοι λήψεως αποφάσεων (decision makers) παίρνουν τις αποφάσεις ιεραρχικά. Ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων (ή παίκτης) του άνω επιπέδου (ηγέτης) ελέγχει ένα υποσύνολο των μεταβλητών απόφασης του προβλήματος, στην προσπάθειά του να επιλύσει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιλαμβάνει στους περιορισμούς του ένα δεύτερο πρόβλημα βελτιστοποίησης (lower level),που επιλύεται από τον δεύτερο υπεύθυνο λήψης αποφάσεων (ακόλουθος), ο οποίος ελέγχει τις κάτω μεταβλητές απόφασης. Τα προβλήματα μεικτού ακέραιου διεπίπεδου προγραμματισμού είναι γενικά μη-κυρτά και η εύρεση του ολικού βέλτιστου είναι επίπονη διαδικασία.

Μορφοποιήσεις διεπίπεδου προγραμματισμού συναντώνται σε αρκετούς και ποικίλους τομείς επιστημονικής έρευνας, όπως προγραμματισμός αγροτικής παραγωγής, λήψη κυβερνητικών αποφάσεων, οικονομικός προγραμματισμός, δημοσιονομική διαχείριση, βέλτιστη τιμολόγηση, κυκλοφοριακός σχεδιασμός και πολλά άλλα. Η ευρεία εφαρμογή του και η πολυπλοκότητα του διεπίπεδου προγραμματισμού οδήγησε τους ερευνητές στην ανάγκη αναζήτησης καινούργιων μεθόδων και τεχνικών βελτιστοποίησης για την επίλυση τους. Παρ' όλες τις προσπάθειες όμως δεν έχει βρεθεί ακόμη κάποια τεχνική που να εφαρμόζεται καθολικά σε όλα τα προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού.

Ένα από τα πιο συνηθισμένα και σύγχρονα σχετικά προβλήματα είναι η λήψη αποφάσεων στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, που έχει προκύψει από την απελευθέρωση τους, και είναι μια σημαντική οικονομική εξέλιξη που έχει συντελεστεί σε πολλές χώρες ανά τον κόσμο τα τελευταία χρόνια. Αν και ο συγκεκριμένος σχεδιασμός της αγοράς που έχει υιοθετηθεί διαφέρει από χώρα σε χώρα, πολλές από τις βασικές αρχές παραμένουν λίγο πολύ οι ίδιες. Οι περισσότεροι σχεδιασμοί έχουν θεσπίσει μία χονδρική και μία λιανική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας που λειτουργούν σε μακροπρόθεσμους και βραχυπρόθεσμους χρονικούς ορίζοντες. Στο επίπεδο του ημερήσιου προγραμματισμού της χονδρικής αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας, οι παραγωγοί υποβάλλουν ελεύθερα προσφορές (οι οποίες συνήθως υπόκεινται σε κάποιο ανώτατο όριο) για την παραγωγή ενέργειας. Ένας ανεξάρτητος διαχειριστής του συστήματος, ΑΔΣ (independent system operator- ISO), εκκαθαρίζει την αγορά, κατανέμοντας ποσότητες ενέργειας στους συμμετέχοντες παραγωγούς, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος που απαιτείται για την ικανοποίηση της ζήτησης για ενέργεια, βάσει των υποβληθεισών προσφορών. Στην παρούσα εργασία, υιοθετούμε την πλευρά ενός μοναδικού (μεμονωμένου, για το υπόλοιπο της εργασίας) παραγωγού που συμμετέχει σε μια αγορά ημερήσιου προγραμματισμού ηλεκτρικής ενέργειας. Υποθέτοντας ότι έχει πλήρη γνώση της ζήτησης για ενέργεια και των προσφορών/στοιχείων-κόστους όλων των άλλων παραγωγών, εξετάζουμε το πρόβλημα της επιλογής της βέλτιστης τιμής προσφοράς για κάθε μονάδα ενέργειας που θα παράσχει στο σύστημα. Εδώ, η λέξη βέλτιστη αναφέρεται στο ότι μετά την εκκαθάριση της αγοράς από τον ΑΔΣ, το κέρδος του συγκεκριμένου παραγωγού θα πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό. Το συγκεκριμένο πρόβλημα εγείρεται με φυσικό τρόπο σε ανοιχτές διαφανείς δημοπρασίες σε αγορές με δοκιμαστικές προσφορές, στις οποίες οι συμμετέχοντες υποβάλλουν προσφορές επαναλαμβανόμενα μέχρι το κλείσιμο της αγοράς. Επίσης, είναι ένα σημαντικό υποπρόβλημα σε επαναληπτικές αριθμητικές μεθόδους σταθερού σημείου (fixed point) που στοχεύουν στην εύρεση των κοινών βέλτιστων στρατηγικών υποβολής προσφορών όλων των παραγωγών σε κλειστές δημοπρασίες, στις οποίες οι παραγωγοί υποβάλλουν σφραγισμένες προσφορές (Andrianesis et al. 2010).

Στην παρούσα εργασία για την εύρεση της βέλτιστης προσφοράς του μεμονωμένου παραγωγού υιοθετούμε μια προσέγγιση δυο σταδίων. Στο πρώτο στάδιο παράγονται οι βέλτιστες λύσεις του προβλήματος του άνω επιπέδου, μεταβάλλοντας παραμετρικά μια μεταβλητή απόφασης του άνω επιπέδου, ενώ όλες οι άλλες παραμένουν σταθερές. Στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τις κατάλληλες επίπεδες τομές (valid inequalities) ώστε να βρεθεί, με τις μικρότερες δυνατές υπολογιστικές απαιτήσεις, το ολικό βέλτιστο.

Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι αμφίπλευρη. Από τη μια πλευρά, μπορεί να υποβοηθήσει μεμονωμένους παραγωγούς ηλεκτρικής ενέργειας στην ανάπτυξη προσφορών προς υποβολή που θα μεγιστοποιήσουν το ατομικό τους κέρδος, ενώ από την άλλη, βοηθάει τους διαχειριστές τέτοιων συστημάτων να εντοπίσουν αθέμιτες προσπάθειες χειραγώγησης της τιμής εκκαθάρισης της αγοράς από τους μεμονωμένους παραγωγούς, και να καταρτίσουν κανόνες για την αποτροπή τους.

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.2.1 Διεπίπεδα μοντέλα για βέλτιστη υποβολή προσφορών παραγωγών ενέργειας

Ανάμεσα σε αυτούς που ανέπτυξαν διεπίπεδα μοντέλα για βέλτιστη υποβολή προσφορών σε αγορές ηλεκτρικής ενέργειας είναι οι Hobbs et al. (2000), Li and Shahidehpour (2005), και Zhao et al. (2008). Ένα κοινό χαρακτηριστικό των μοντέλων αυτών είναι ότι περιλαμβάνουν προβλήματα κάτω επιπέδου που είναι κυρτά. Αυτό επέτρεψε στους συγγραφείς αυτούς να αναπτύξουν KKT μεθόδους επίλυσης, οι οποίες όμως οδηγούν σε τοπικά βέλτιστα εξαιτίας της πολυπλοκότητας του προβλήματος. Οι Hobbs et al. (2000) ανέπτυξαν ένα διεπίπεδο μοντέλο βελτιστοποίησης και χρησιμοποίησαν έναν αλγόριθμο ποινής εσωτερικών σημείων (penalty interior point algorithm) όπου το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σαν παιχνίδι Nash με πολλούς παίκτες. Οι Li and Shahidehpour (2005) ανέπτυξαν ένα διεπίπεδο μοντέλο βελτιστοποίησης και χρησιμοποίησαν συναρτήσεις ευαισθησίας για την πληρωμή του παραγωγού συναρτήσει της στρατηγικής υποβολής πρόσφορων που υιοθετεί, ενώ οι Zhao et al. (2008) ανέπτυξαν μια εναλλακτική μεθοδολογία βελτιστοποίησης.

Ένα άλλο μοντέλο διεπίπεδης βελτιστοποίησης που αντιμετωπίζει το πρόβλημα με την εύρεση τοπικών βέλτιστων προτάθηκε από τους Weber and Overbye (2002). Το μοντέλο αυτό μεγιστοποιεί την ευημερία ενός μεμονωμένου παίκτη που ελέγχει τόσο μονάδες κατανάλωσης όσο και παραγωγούς στο άνω επίπεδο, ενώ στο κάτω επίπεδο βρίσκει το ενεργειακό ισοζύγιο που μεγιστοποιεί τη συνολική ευημερία. Η συνολική ευημερία εκφράζεται σαν την διαφορά του συνολικού κέρδους όλων των καταναλωτών με το συνολικό κόστος όλων των παραγωγών. Χρησιμοποίησαν επίσης τον αλγόριθμο αυτόν για τον προσδιορισμό σημείων ισορροπίας Nash.

Μια άλλη συνήθης τεχνική που προτείνεται για την αντιμετώπιση της εγγενούς πολυπλοκότητας του προβλήματος είναι η διακριτοποίηση των στρατηγικών διαστημάτων του στρατηγικού παραγωγού (υπεύθυνος λήψης αποφάσεων άνω επιπέδου). Αυτό όμως δεν οδηγεί απαραίτητα στο ολικό βέλτιστο, αφού δεν εξετάζει κάποιες τιμές παραγωγής εκ των προτέρων. Τέτοιες είναι οι μέθοδοι των Zhang et al. (2000), Lietal. (2004), Soleymani et al. (2008), Vahidinasab and Jadid (2009), and Gabriel and Leuthold (2010). Η μέθοδος επίλυσης που προτείνεται από τους Zhang et al. (2000) είναι μια μεθοδολογία βασισμένη σε Lagrangian χαλάρωση που εξετάζει την αβεβαιότητα για τη διαθεσιμότητα των παραγωγών που συμμετέχουν με την μορφή διακριτών προσφορών και αντίστοιχων πιθανοτήτων. Αντίθετα, η μέθοδος που προτείνεται από τους Li et al. (2004) είναι επαναληπτική και αναζητά σημεία ισορροπίας Nash, ενώ αυτή των Soleymani et al. (2008) βασίζεται στην θεωρία παιγνίων. Πιο συγκεκριμένα οι συγγραφείς της τελευταίας προσέγγισης κάνουν την υπόθεση ότι κάθε παραγωγός προβλέπει την οριακή τιμή της αγοράς χρησιμοποιώντας μια τεχνική σαν αυτή των νευρωνικών δικτύων, και πως ο κάθε παραγωγός προβλέπει την ίδια τιμή.

Οι Vahidinasab and Jadid (2009) ανέπτυξαν ένα μοντέλο βελτιστοποίησης που εξετάζει πολλαπλούς αντικειμενικούς στόχους. Μετά την χρησιμοποίηση της μεθόδου μειωμένης εφικτής περιοχής ε-constraint (ε-constraint reduced feasible region) για την αντιμετώπιση των πολλαπλών στόχων, αντικατέστησαν το πρόβλημα του κάτω επιπέδου με τις πρώτης τάξης συνθήκες βελτιστότητας και έλυσαν το πρόβλημα που προέκυψε με γενικό λογισμικό βελτιστοποίησης. Τέλος, οι Gabriel and Leuthold (2010) παρουσίασαν μια διεπίπεδη μαθηματική μορφοποίηση και χρησιμοποιώντας διαζευκτικούς (disjunctive) περιορισμούς και γραμμικοποίηση την αναδιατύπωσαν ως ένα μεικτό ακέραιο γραμμικό πρόβλημα (MILP), το οποίο στην συνέχεια έλυσαν με γενικό λογισμικό βελτιστοποίησης.

Μια άλλη κατεύθυνση προς την οποία έχουν κινηθεί οι ερευνητές είναι η ανάπτυξη ευρετικών/ μεταευρετικών μεθόδων επίλυσης, όπως στις εργασίες των Ma et al. (2006), Bajpai and Singh (2008), Zhangetal. (2011), και Foroud et al. (2011). Η μέθοδος που προτείνεται από τους Bajpai and Singh (2008) είναι η ευρετική σμήνους σωματιδίων ασαφούς προσέγγισης (fuzzy adaptive particle swarm optimization heuristic) που αντιμετωπίζει τις περιπτώσεις και της μίας περιόδου και των πολλών περιόδων. Μέθοδοι βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων προτείνονται και από τους Ma et al. (2006) και Zhang et al. (2011), ενώ οι Foroud et al. (2011) δημιούργησαν έναν ευρετικό αλγόριθμο και μια μεθοδολογία ασαφούς λογικής που εφαρμόζει μια διατύπωση πολλαπλών αντικειμενικών στόχων που μεγιστοποιεί το κέρδος των παραγωγών που συμμετέχουν.

Ενώ οι προηγούμενες επιστημονικές εργασίες περιγράφουν την εφαρμογή των προτεινόμενων αλγορίθμων επίλυσης σε συγκεκριμένες μελέτες περιπτώσεων (case studies), δεν παρουσιάζουν γενικά πειραματικά αποτελέσματα, κάνοντας δύσκολη την εκτίμηση των μέσων και των δυσμενέστερων υπολογιστικών απαιτήσεων αυτών των αλγορίθμων, όπως και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τυχαίες περιπτώσεις προβλημάτων. Αντίστοιχη δυσκολία παρουσιάζεται με τεχνικές που χρησιμοποιούν εμπορικό λογισμικό βελτιστοποίησης, καθώς η πολυπλοκότητα του προβλήματος καθιστά δύσκολη την χρήση τέτοιων τεχνικών σε περιπτώσεις ρεαλιστικών προβλημάτων μεγάλης κλίμακας.

Αρκετοί ερευνητές μορφοποιούν το πρόβλημα βελτιστοποίησης στρατηγικής υποβολής προσφορών ως στοχαστικό, προκειμένου να περιγραφεί η αβεβαιότητα που παρουσιάζει το πρόβλημα. Τέτοιες είναι οι περιπτώσεις των Gountis and Bakirtzis (2004) και Badri et al. (2008). Στην πρώτη, χρησιμοποιείται μια ευρετική τεχνική επίλυσης με βελτιστοποίηση Monte-Carloγια την εύρεση της βέλτιστης λύσης, ενώ στη δεύτερη μια προσέγγιση διαχείρισης κινδύνου με αμφίπλευρες συμβάσεις και μεταβατικούς περιορισμούς η οποία επιλύεται μέσω μιας μεθοδολογίας πρωτεύοντος- δυϊκού εσωτερικού σημείου (primal-dual interior point).

1.2.2 Ευρετικοί αλγόριθμοι επίλυσης μεικτών ακέραιων διεπίπεδων προβλημάτων

Η ειδική μορφή ενός μεικτού ακέραιου διεπίπεδου προβλήματος (MIBP) εξαρτάται από την παρουσία ή μη περιορισμών κάτω/ άνω επιπέδου, από την παρουσία ή μη συνεχών/ διακριτών μεταβλητών, και από τη συσχέτιση κάθε μεταβλητής απόφασης με τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων (άνω ή κάτω επιπέδου) που την ελέγχει. Καθένας από αυτούς τους παράγοντες επιδρά κρίσιμα στις ιδιότητες του προβλήματος. Επομένως, ένας αλγόριθμος επίλυσης για MIBP συνήθως εφαρμόζεται μόνο σε μια συγκεκριμένη διατύπωση και μια συγκεκριμένη διαμόρφωση. Δημοφιλείς τεχνικές επίλυσης που αναπτύχθηκαν για MIBP περιλαμβάνουν τεχνικές επαναδιατύπωσης, τεχνικές branch and bound/ cut, και τεχνικές παραμετρικού προγραμματισμού.

Ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους στην έρευνα των MIBP είναι το επιστημονικό άρθρο των Moore and Bard (1990), στο οποίο οι συγγραφείς περιγράφουν πως από τα τρία καθιερωμένα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για την διακοπή εξερεύνησης κάτω από ένα υποπρόβλημα σε έναν τυπικό αλγόριθμο branch and boundγια μεικτό ακέραιο προγραμματισμό, μόνο ένα (το χαλαρωμένο πρόβλημα κάτω επιπέδου δεν έχει εφικτή λύση) είναι εφαρμόσιμο στην περίπτωση MIBP. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, οι συγγραφείς ανέπτυξαν έναν ευρετικό αλγόριθμο επίλυσης για τη γενική περίπτωση που και οι δύο υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων ελέγχουν και τις συνεχείς και τις ακέραιες μεταβλητές και λειτουργικοί περιορισμοί περιλαμβάνονται και στα δύο επίπεδα. Οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος βρίσκει με ακρίβεια τη βέλτιστη λύση όταν όλες οι μεταβλητές που ελέγχονται από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων του άνω επιπέδου είναι διακριτές.

Ο αλγόριθμος τωνMoore and Bard (1990) εξελίχθηκε αργότερα από τους DeNegre and Ralphs (2009) με την προσθήκη τεχνικών επίπεδων τομών για τη βελτίωση των ορίων στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενική συνάρτησης. Η διατύπωση που εφαρμόζεται περιλαμβάνει περιορισμούς και ακέραιες μεταβλητές και στα δύο επίπεδα. Η προτεινόμενη διατύπωση χρησιμοποιεί ένα δέντρο branch and cut, και επιλύει μια κατάλληλη χαλάρωση σε κάθε έναν από τους κόμβους του. Αν η λύση που προκύπτει είναι εφικτή και για τα δύο επίπεδα, τότε η έρευνα στο σχετιζόμενο τμήμα τερματίζεται. Στην αντίθετη περίπτωση, προστίθεται μια κατάλληλη επίπεδη τομή που αποκλείει αυτήν την λύση χωρίς να αποκλείει καμία άλλη εφικτή και για τα δύο επίπεδα. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, το πλεονέκτημα της προτεινόμενης διαδικασίας σε σχέση με τον αλγόριθμο τωνMoore and Bard (1990) είναι ότι βασίζεται μόνο στην επίλυση ακέραιων γραμμικών προβλημάτων, χρησιμοποιώντας τυπικούς κανόνες απαλοιφής και διακλάδωσης.

Ακριβείς και ευρετικές τεχνικές επίλυσης που βασίζονται στην τεχνική branch and bound γιαMIBP με δυαδικές μεταβλητές που ελέγχονται από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων του άνω επιπέδου και συνεχείς μεταβλητές που ελέγχονται από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων του κάτω επιπέδου αναλύονται από τους Wen and Yang (1990). Οι συγγραφείς αντλούν πληροφορίες για τα όρια που επιβάλλονται στη βέλτιστη λύση που προκύπτει όταν η αντικειμενική συνάρτηση του κάτω επιπέδου περιορίζεται και όλες οι μεταβλητές απόφασης ελέγχονται από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων του άνω επιπέδου. Επισημαίνουν πως όταν ο αριθμός των δυαδικών μεταβλητών αυξάνεται γραμμικά, ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται εκθετικά. Για τον λόγο αυτόν, προτείνουν μια ευρετική διαδικασία επίλυσης που παράγει λύσεις κοντά στην βέλτιστη σε λογικό υπολογιστικό χρόνο. Αυτή η μέθοδος επίλυσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που οι μεταβλητές απόφασης του άνω επιπέδου είναι ακέραιες.

Οι Wen and Huang (1996) ανέπτυξαν έναν tabu-search αλγόριθμο για διατύπωση μεικτού ακέραιου διεπίπεδου προγραμματισμού, στην οποία οι μεταβλητές απόφασης του άνω επιπέδου είναι δυαδικές και αυτές του κάτω επίπεδου είναι συνεχείς. Τέλος, οι Köppe et al. (2010) εξετάζουν ένα διεπίπεδο πρόβλημα με μόνο ακέραιες μεταβλητές απόφασης στο κάτω επίπεδο και περιορισμούς και στα δύο επίπεδα, και όταν οι μεταβλητές απόφασης του άνω επιπέδου είναι συνεχείς και όταν είναι ακέραιες. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος επίλυσης βασίζεται στη θεωρία του παραμετρικού ακέραιου προγραμματισμού και τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο όταν ο αριθμός των μεταβλητών απόφασης του κάτω επιπέδου είναι σταθερός. Αν το βέλτιστο του προβλήματος δεν επιτευχθεί, ο αλγόριθμος είναι ικανός να βρει μια ε-βέλτιστηλύση στην οποία η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προσεγγίζει το επιθυμητό βέλτιστο σε πολυωνυμικό χρόνο επίσης.

1.3 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

Το υπόλοιπο αυτής της διπλωματικής εργασίας χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες που καταλαμβάνουν τα Κεφάλαια 2 - 5, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μορφοποίηση του προβλήματος μεικτού ακέραιου διεπίπεδου προγραμματισμού και η μοντελοποίησή του για την περίπτωση της βέλτιστης υποβολής προσφορών σε αγορές ημερήσιου προγραμματισμού ηλεκτρικής ενέργειας.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε για την επίλυση του προβλήματος.

Στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζεται ο αλγόριθμος σε μια μελέτη περίπτωση από την ελληνική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του.

Τέλος, το Κεφάλαιο 5 αποτελεί μια σύνοψη της εργασίας.

Κεφάλαιο 2 Μορφοποίηση του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το πρόβλημα της βέλτιστης υποβολής προσφορών σε αγορές ηλεκτρικής ενέργειας και η μοντελοποίησή του. Θεωρούμε ένα σύνολο μονάδων παραγωγής που συμμετέχουν σε μια αγορά ημερήσιου προγραμματισμού ηλεκτρικής ενέργειας. Οι παραγωγοί υποβάλλουν προσφορές ενέργειας σε έναν ανεξάρτητο διαχειριστή συστήματος- ΑΔΣ, ο οποίος εκκαθαρίζει την αγορά και καθορίζει την εκκίνηση και την ποσότητα ενέργειας κάθε μονάδας παραγωγής, εξασφαλίζοντας ότι η συνολική ζήτηση ενέργειας ικανοποιείται στο ελάχιστο συνολικό κόστος για το σύστημα, βάσει των υποβληθεισών προσφορών. Τα τεχνικά χαρακτηριστικά κάθε μονάδας παραγωγής (τεχνικό ελάχιστο και μέγιστο), καθώς και το σταθερό κόστος εκκίνησης είναι σταθερά και γνωστά στον ΑΔΣ. Μετά τον καθορισμό της ποσότητας ενέργειας κάθε παραγωγού, υιοθετείται ένα σχήμα εκκαθάρισης πληρωμών, το οποίο αποζημιώνει κάθε συμμετέχουσα μονάδα καταβάλλοντάς της το πλήρες κόστος εκκίνησης και μια ενιαία τιμή εκκαθάρισης της αγοράς (*οριακή τιμή του συστήματος*) για κάθε MWh που θα παραγάγει.

Κάθε παραγωγός αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής της βέλτιστης τιμής προσφοράς, της προσφοράς δηλαδή που θα πρέπει να υποβάλλει έτσι ώστε μετά την εκκαθάριση της αγοράς και τον προσδιορισμό των ποσοτήτων ενέργειας όλων των συμμετεχουσών μονάδων, το κέρδος του να μεγιστοποιηθεί. Στην εργασία αυτή, υιοθετούμε την πλευρά ενός μοναδικού παραγωγού χρησιμοποιώντας ένα καθοριστικό μοντέλο για αυτό το πρόβλημα. Υποθέτοντας ότι έχει πλήρη γνώση των παραμέτρων της αγοράς (των τεχνικών χαρακτηριστικών και των προσφορών/στοιχείων-κόστους των άλλων μονάδων παραγωγής, καθώς και της ζήτησης για ενέργεια), θέλουμε να βρούμε την τιμή προσφοράς για ενέργεια που θα πρέπει να υποβάλλει, έτσι ώστε, μετά την εκκαθάριση της αγοράς, να μεγιστοποιήσει το μεμονωμένο του κέρδος.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε το μαθηματικό μοντέλο που αναπτύξαμε για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Για τη μαθηματική μορφοποίηση, χρησιμοποιούμε τους παρακάτω μαθηματικούς συμβολισμούς:

Σύνολα:

I Μονάδες παραγωγής, με δείκτη *i*, ο δείκτης του στρατηγικού παραγωγού είναι 1.

Μεταβλητές Απόφασης:

q_i Ποσότητα ενέργειας του παραγωγού *i*.

z_i Δυαδική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα *i* παράγει θετική ποσότητα ενέργειας, και 0 διαφορετικά.

Παράμετροι:

p_i Τιμή προσφοράς ενέργειας του παραγωγού*i.*

m_i Τεχνικό ελάχιστο του παραγωγού *i.*

k_i Τεχνικό μέγιστο του παραγωγού *i.*

s_i Κόστος εκκίνησης του παραγωγού*i.*

d Ζήτηση ενέργειας.

<u>Πρόβλημα Ανεξάρτητου Διαχειριστή Συστήματος</u>

$$\min_{z_i,\, q_i} f = \sum_{i \in I} \left(p_i q_i + s_i z_i \right) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in I} q_i = d \tag{2}$$

$$m_i z_i \le q_i \le k_i z_i, \forall i \in I \tag{3}$$

$$z_i \text{ binary}, \forall\, i \in I \tag{4}$$

$$q_i \ge 0, \forall\, i \in I \tag{5}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (1) ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος της παρεχόμενης ενέργειας. Ο περιορισμός (2) εκκαθαρίζει την αγορά, εξασφαλίζοντας ότι η ζήτηση για ενέργεια θα ικανοποιηθεί. Ο περιορισμός (3) εγγυάται ότι δεν θα παραβιαστεί το τεχνικό ελάχιστο και το τεχνικό μέγιστο κάθε μονάδας παραγωγής. Τέλος, οι περιορισμοί (4) και (5) επιβάλλουν ακεραιότητα και μη-αρνητικότητα, αντίστοιχα, στις μεταβλητές απόφασης του κάτω επιπέδου. Οι περιορισμοί (5) μπορούν να παραληφθούν αφού η μη αρνητικότητα καλύπτεται από τους περιορισμούς (3). Παρ'όλ'αυτά διατηρούνται για την πληρότητα του προβλήματος.

Αφού καθοριστεί η ποσότητα ενέργειας κάθε παραγωγού, υιοθετείται ένα σύστημα εκκαθάρισης που αποζημιώνει κάθε παραγωγό που συμμετέχει με το κόστος εκκίνησης (start-up cost) και μια ενιαία τιμή εκκαθάρισης αγοράς (γνωστή και σαν οριακή τιμή συστήματος (system marginal price) για κάθε MWh που παρέχει στο σύστημα. Αυτή η τιμή είναι η δυϊκή μεταβλητή του περιορισμού ισοζυγίου ενέργειας (2). Επειδή είναι πρόβλημα μεικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP), το πρόβλημα (1)-(5) δεν έχει σκιώδεις τιμές με τον παραδοσιακό τρόπο. Εντούτοις, η οριακή τιμή του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί βρίσκοντας την βέλτιστη λύση αυτού του προβλήματος αρχικά, και έπειτα λύνοντας το πρόβλημα που προκύπτει αφού οι ακέραιες μεταβλητές πάρουν τις βέλτιστες τιμές από αυτή την λύση. Βάσει της θεωρίας οριακής τιμολόγησης οι μονάδες παραγωγής πληρώνονται με αυτή την σκιώδη τιμή του περιορισμού εκκαθάρισης της αγοράς που υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο.

Η οριακή τιμή του συστήματος εκφράζεται σαν το οριακό κόστος που απαιτείται για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας ενέργειας. Αυτό ερμηνεύεται σαν το επιπλέον κόστος, βάση της αντικειμενικής συνάρτησης, που απαιτείται για την παραγωγή αυτής της μονάδας ενέργειας. Στην παρούσα διατύπωση, η οριακή τιμή του συστήματος καθορίζεται από την οριακή μονάδα (marginal unit), που είναι η μονάδα που θα παραγάγει την επιπλέον MWh ενεργείας, Οι μη-κυρτότητες του προβλήματος μπορεί να οδηγήσουν σε οριακή τιμή συστήματος που διαφέρει από την μέγιστη αποδεκτή προσφορά, όπως για την υψηλότερη προγραμματισμένη προσφορά.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθούμε στην διαδικασία που έχει προταθεί από τους O' Neill et al. (2005)., που συσχετίζουν μια τιμή με κάθε ακέραια μεταβλητή (η κατάσταση κάθε μονάδας στην παραπάνω διατύπωση), ίση με την σκιώδη τιμή του αντίστοιχου περιορισμού, που θέτει αυτή την μεταβλητή ίση με την βέλτιστη της τιμή, Δίνοντας τιμές στις ακέραιες μεταβλητές, προκύπτει ένα σύνολο τιμών που παρέχει ένα ανταγωνιστικό ισοζύγιο. Παρ'όλες τις ελκυστικές ιδιότητες της προσέγγισης αυτής οι ΑΔΣ συνήθως δεν υιοθετούν αυτό τον σχεδιασμό στη πράξη.

Κάθε παραγωγός αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής της βέλτιστης τιμής προσφοράς του, δηλαδή της προσφοράς που θα υποβάλλει στον ΑΔΣ, ώστε, μετά την εκκαθάριση της αγοράς και τον καθορισμό των ποσοτήτων ενέργειας των συμμετεχουσών μονάδων να μεγιστοποιείται το κέρδος του.

Για την διαμόρφωση του προβλήματος βελτιστοποίησης του στρατηγικού παραγωγού (strategic producer's) χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

Μεταβλητές Απόφασης:

p_1 Τιμή προσφοράς ενέργειας του στρατηγικού παραγωγού.

λ Σκιώδης τιμή του περιορισμού εκκαθάρισης της αγοράς που εξασφαλίζει την ικανοποίηση της ζήτησης ενέργειας (οριακή τιμή συστήματος- system marginal price).

Παράμετροι:

$\overline{P}$ Ανώτατη τιμή (price cap) της προσφοράς ενέργειας του παραγωγού *i.*

c_1 μοναδιαίο κόστος παραγωγής του παραγωγού *i.*

<u>Πρόβλημα Στρατηγικού Παραγωγού</u>

$$\underset{\substack{p_1 \\ z_i, q_i, \lambda}}{\text{Max}}\ F_1 = \left(\lambda - c_1\right) q_1 \tag{6}$$

$$\text{s.t.}\ c_1 \le p_1 \le \overline{P} \tag{7}$$

$$\left(z_i, q_i, \lambda\right) \in \arg\min_{z_i, q_i, \lambda} f = \sum_{i \in I} \left(p_i q_i + s_i z_i\right) \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in I} q_i = d \qquad \overset{(multiplier)}{(\lambda)} \tag{9}$$

$$m_i z_i \le q_i \le k_i z_i, \forall i \in I \tag{10}$$

$$z_i \text{ binary}, \forall\, i \in I \tag{11}$$

$$q_i \ge 0, \forall\, i \in I \tag{12}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (6) μεγιστοποιεί το κέρδος του μεμονωμένου παραγωγού. Το κέρδος αυτό εξαρτάται από την ποσότητα ενέργεια που παρέχει, q_1, που είναι μια πρωτεύουσα μεταβλητή απόφασης του κάτω επιπέδου, καθώς και από την τιμή εκκαθάρισης της αγοράς, λ, που είναι η δυϊκή μεταβλητή του κάτω επιπέδου από τον περιορισμό του ισοζυγίου ενέργειας (9). Το κόστος εκκίνησης του πρώτου παραγωγού ενέργειας δεν περιλαμβάνεται στην αντικειμενική συνάρτηση (6), δεδομένου ότι οι κανόνες της αγοράς καθορίζουν ότι κάθε παραγωγός αποζημιώνεται πλήρως για το συγκεκριμένο κόστος. Ο περιορισμός (7) επιβάλλει ένα κάτω κι ένα άνω όριο στην τιμή προσφοράς του μεμονωμένου παραγωγού. Και αυτά τα όρια επιβάλλονται από κανόνες της αγοράς, σύμφωνα με τους οποίους η τιμή προσφοράς ενός παραγωγού δεν μπορεί να είναι χαμηλότερη από το μοναδιαίο κόστος παραγωγής του και υψηλότερη από μία δεδομένη τιμή που είναι γνωστή και ως *price-cap,* και καθορίζεται από τον διαχειριστή του συστήματος. Το πρόβλημα του κάτω επίπεδου, ή πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ, που παρουσιάστηκε παραπάνω ορίζεται από τη μορφοποίηση (8)-(12).

Το πρόβλημα (6)-(12) είναι ένα μεικτό ακέραιο διεπίπεδο μοντέλο βελτιστοποίησης. Η ύπαρξη των αδιαιρετοτήτων που προκύπτουν από τη μοντελοποίηση της εκκίνησης των μονάδων παραγωγής με δυαδικές μεταβλητές και οι περιορισμοί για το τεχνικό ελάχιστό τους διαφοροποιούν τη μορφοποίηση αυτή από άλλες παρόμοιες που έχουν αναπτυχθεί στο παρελθόν. Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε μια μεθοδολογία επίλυσης που βασίζεται σε παραμετρικό μεικτό ακέραιο προγραμματισμό για την εύρεση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος.

Μια βασική ιδιότητα του προβλήματος (6)-(12) είναι ότι μπορεί να μην έχει βέλτιστη λύση, ακόμη κι όταν υπάρχει βέλτιστη λύση για το πρόβλημα του κάτω επιπέδου. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν η βέλτιστη λύση του προβλήματος του κάτω επιπέδου δεν είναι μοναδική. Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση κατά την οποία το κέρδος του μεμονωμένου παραγωγού μεγιστοποιείται για μια συγκεκριμένη τιμή του p_1. Ας υποθέσουμε τώρα ότι, γι' αυτή τη συγκεκριμένη τιμή, η βέλτιστη λύση του κάτω προβλήματος δεν είναι μοναδική, αλλά, υπάρχουν δύο βέλτιστες λύσεις τέτοιες ώστε ο μεμονωμένος παραγωγός συμμετέχει την αγορά ($z_1 = 1$) και μάλιστα μεγιστοποιείτο κέρδος του στην πρώτη, ενώ ο ίδιος δεν συμμετέχει στην αγορά ($z_1 = 0$) και αντιλαμβάνεται μηδενικό κέρδος στη δεύτερη.

Η βασική θεωρία της διεπίπεδης βελτιστοποίησης (Dempe, 2002) δεν επιτρέπει τη συνεργασία οποιασδήποτε μορφής μεταξύ του άνω και του κάτω επιπέδου λήψης απόφασης. Ο παίκτης του άνω επιπέδου πάντοτε επιλέγει πρώτος τις τιμές των μεταβλητών απόφασης που θεωρεί πιο συμφέρουσες. Στη συνέχεια, με τις τιμές αυτές δεδομένες, ο παίκτης του κάτω επιπέδου έπεται και βρίσκει τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης που βρίσκονται υπό τον έλεγχό του. Γίνεται φανερό από τη συζήτηση αυτή, ότι ο πρώτος παίκτης δεν έχει κανέναν τρόπο να εξαναγκάσει το δεύτερο στην επιλογή μιας συγκεκριμένης βέλτιστης λύσης για το κάτω επίπεδο, όταν υπάρχουν εναλλακτικές τέτοιες λύσεις. Ως εκ τούτου, στο σύντομο υποθετικό σενάριο που περιγράφεται παραπάνω, δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι ο μεμονωμένος παραγωγός θα επιτύχει όντως το μέγιστο κέρδος του.

Αρκετές προσεγγίσεις έχουν προταθεί για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος, οι πιο δημοφιλείς από τις οποίες καταφεύγουν σε μια μικρή τροποποίηση του ορισμού του προβλήματος και της αντίστοιχης μορφοποίησής του. Στο πλαίσιο των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας έχουν προταθεί αρκετοί ειδικοί κανόνες, ωστόσο κανένας από αυτούς δεν έχει υιοθετηθεί καθολικά. Ένας από τους κανόνες αυτούς προτείνει να ευνοείται πάντα η μονάδα με το χαμηλότερο μεταβλητό κόστος παραγωγής. Στην παρούσα εργασία, υιοθετούμε τη λεγόμενη *αισιόδοξη* προσέγγιση (Dempe, 2002), σύμφωνα με την οποία κάθε φορά που υφίστανται πολλαπλές βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα του κάτω επιπέδου, επιλέγεται αυτή που είναι πιο συμφέρουσα για το άνω επίπεδο. Η προσέγγιση αυτή προϋποθέτει ότι ο άνω παίκτης έχει πάντα κάποιο τρόπο να αναγκάσει τον κάτω παίκτη να επιλέξει μια συγκεκριμένη βέλτιστη λύση για το κάτω πρόβλημα. Έτσι, η θεωρία που αναπτύσσουμε στο υπόλοιπο της παρούσας εργασίας αναφέρεται στην αισιόδοξη προσέγγιση του προβλήματος, και δεν ισχύει απαραίτητα σε διαφορετικές προσεγγίσεις.

Κεφάλαιο 3 Μεθοδολογία Επίλυσης

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η μεθοδολογία επίλυσης που χρησιμοποιείται και γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο, βρίσκουμε παραμετρικά τις διακριτές τιμές της τιμής προσφοράς p_1 που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση του κάτω επιπέδου (ελαχιστοποίησης του κόστους για τον ΑΔΣ) για καθένα από τους δυνατούς συνδυασμούς των μονάδων παραγωγής. Ο αλγόριθμος επίλυσης που χρησιμοποιεί την διαδικασία αναζήτησης που αναφέρθηκε έχει προταθεί από τους Geoffrion and Nauss (1977) και αναλύεται παρακάτω. Αφού βρεθούν οι τιμές για κάθε συνδυασμό και για κάθε τιμή προσφοράς p_1 και συσχετιστούν με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F του μεμονωμένου παραγωγού, υιοθετούνται οι κατάλληλες δυαδικές μεταβλητές για την ανάπτυξη των κατάλληλων ανισοτήτων (δυεπίπεδες τομές (cuts)), που επιβάλουν στο πρόβλημα του στρατηγικού παραγωγού τις τιμές αυτές των τοπικών βέλτιστων λύσεων για την εύρεση του ολικού βέλτιστου. για κάθε συνδυασμό και για κάθε τιμή προσφοράς p_1 όπως προέκυψε από το υποπρόβλημα του ΑΔΣ στο πρόβλημα του στρατηγικού παραγωγού.

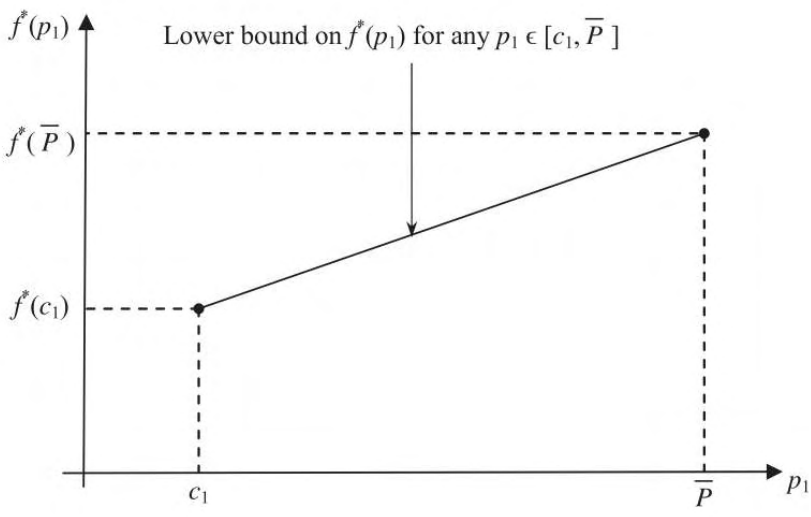
Όταν όλες οι παράμετροι του προβλήματος έχουν πεπερασμένες τιμές, η εφικτή περιοχή του προβλήματος (6)-(12) είναι φραγμένη, αν και μη κυρτή. Για συγκεκριμένη τιμή του p_1, η εφικτή περιοχή του προβλήματος κάτω επιπέδου είναι, επίσης, μη κυρτή, λόγω της παρουσίας των ακεραίων μεταβλητών.

Για τον παραμετρικό προσδιορισμό των διακριτών τιμών της τιμής προσφοράς p_1 που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση του κάτω επιπέδου χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συλλογισμός. Έστω $f^*(p_1)$ η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του κάτω επιπέδου ως συνάρτηση της τιμής προσφοράς του μεμονωμένου παραγωγού. Ο αλγόριθμος που αναπτύσσουμε για την επίλυση του υπό εξέταση προβλήματος βασίζεται στο ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 1: Η συνάρτηση $f^*(p_1)$ είναι μη φθίνουσα, κατά τμήματα γραμμική και κοίλη.

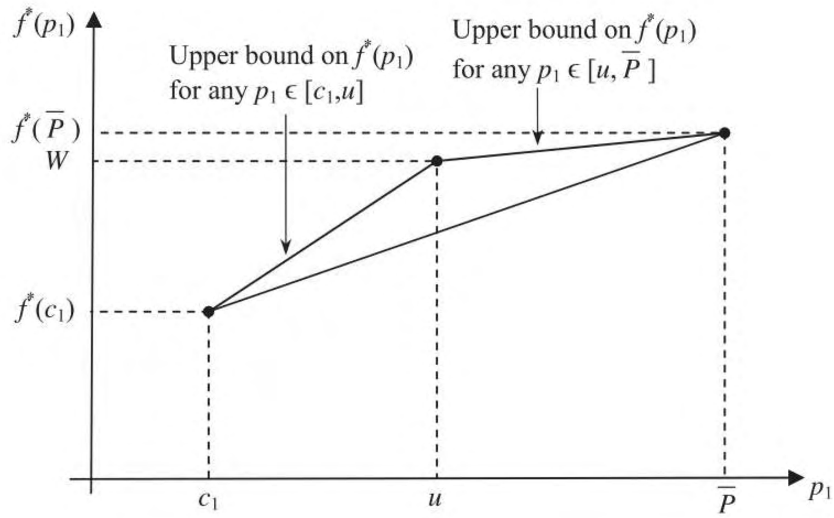
Απόδειξη: Το γεγονός ότι η $f^*(p_1)$ είναι μη φθίνουσα είναι προφανές, δεδομένου ότι η αύξηση της τιμής της p_1 δεν αλλάζει την εφικτή περιοχή του προβλήματος, παρά μόνο αυξάνει το κόστος των λύσεων στις οποίες συμμετέχει η μονάδα 1. Το γεγονός ότι η $f^*(p_1)$ είναι κατά τμήματα γραμμική και κοίλη έχει αποδειχθεί από τον Noltemeier (1970).

Η Πρόταση 1 υπονοεί ότι το πρόβλημα που ορίζεται από τις (6)-(12) μπορεί να λυθεί παραμετρικά με έναν αλγόριθμο επίλυσης που χρησιμοποιεί την ακόλουθη διαδικασία αναζήτησης που έχει προταθεί από τους Geoffrion and Nauss (1977). Ας υποθέσουμε ότι λύνουμε το πρόβλημα του κάτω επιπέδου για $p_1 = c_1$ και $p_1 = \overline{P}$, και ότι οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης στις δύο λύσεις που παίρνουμε είναι $x^*(c_1)$ και $x^*(\overline{P})$, αντίστοιχα. Από την Πρόταση 1 επιβάλλεται $f^*(c_1) \le f^*(\overline{P})$ και η γραμμή που ενώνει τα σημεία $(c_1, f^*(c_1))$ και $(\overline{P}, f^*(\overline{P}))$, παρέχει ένα κάτω όριο για την $f^*(p_1)$ για κάθε p_1 που ανήκει στο διάστημα $[c_1, \overline{P}]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Κάτω όριο της $f^*(p_1)$.

Εάν $x^*(c_1) = x^*(\overline{P})$, τότε η αναζήτηση τερματίζεται, και η βέλτιστη λύση του προβλήματος του κάτω επιπέδου είναι η ίδια για κάθε εφικτή τιμή του p_1. Σε αντίθετη περίπτωση, $x^*(c_1) \neq x^*(\overline{P})$, θεωρούμε τη γραμμή που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του κάτω επιπέδου όταν η λύση δεσμεύεται να είναι η $x^*(c_1)$ και το p_1 αυξάνεται πάνω από c_1 και τη γραμμή που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του κάτω επιπέδου, όταν η λύση δεσμεύεται να είναι η $x^*(\overline{P})$ και το p_1 μειώνεται κάτω από $\overline{P}$. Έστω ότι $p_1 = u$ είναι το σημείο στο οποίο οι δύο αυτές γραμμές τέμνονται, και ας υποθέσουμε ότι η τιμή των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων είναι ίση με W σε αυτό το σημείο. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $(c_1, f^*(c_1))$ και (u,W) αποτελεί άνω όριο για την $f^*(p_1)$ για κάθε p_1 που ανήκει στο διάστημα $[c_1,u]$, ενώ η ευθεία που ενώνει τα σημεία (u,W) και $(\overline{P}, f^*(\overline{P}))$ αποτελεί άνω όριο για την $f^*(p_1)$ για κάθε p_1 που ανήκει στο διάστημα $[u,\overline{P}]$ όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.

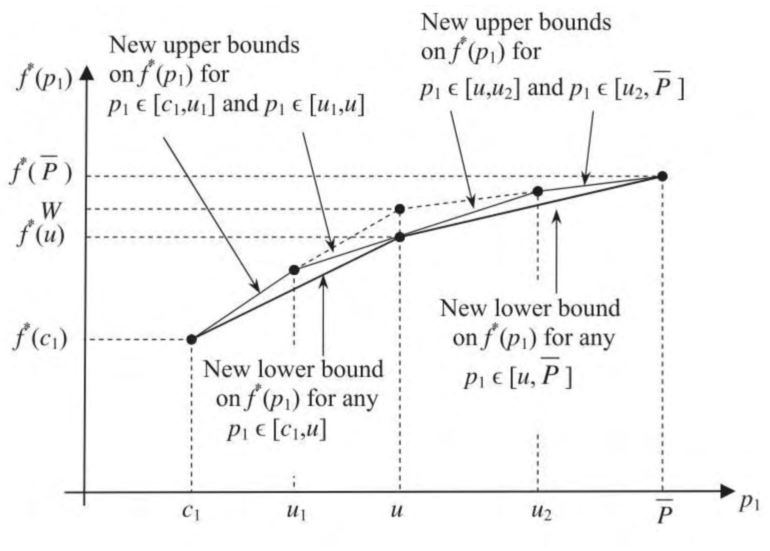


Σχήμα 2. Άνω όριο της $f^*(p_1)$.

Στη συνέχεια, λύνουμε το πρόβλημα του κάτω επιπέδου για $p_1 = u$. Αν $f^*(u) = W$, τότε η αναζήτηση τερματίζεται, συμπεραίνοντας ότι η $x^*(c_1)$ είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος του κάτω επιπέδου για $c_1 \le p_1 \le u$ και η $x^*(\overline{P})$ είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος του κάτω επιπέδου για $u \le p_1 \le \overline{P}$. Αν όχι, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, θεωρώντας τα ακόλουθα δύο ζεύγη γραμμών. Το πρώτο ζεύγος αποτελείται από τη γραμμή που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του κάτω επιπέδου όταν η λύση δεσμεύεται να είναι η $x^*(c_1)$ και το p_1 αυξάνεται πάνω από c_1, και τη γραμμή που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του κάτω επιπέδου όταν η λύση δεσμεύεται να είναι η $x^*(u)$ και το p_1 μειώνεται κάτω από u. Το δεύτερο ζεύγος αποτελείται από τη γραμμή που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του κάτω επιπέδου, όταν η λύση δεσμεύεται να είναι η $x^*(\overline{P})$ και το p_1 μειώνεται κάτω από $\overline{P}$ και τη γραμμή που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος του κάτω επιπέδου, όταν η λύση δεσμεύεται να είναι η $x^*(u)$ και το p_1 αυξάνεται πάνω από u και έτσι προκύπτουν νέα πάνω και κάτω όρια για την $f^*(p_1)$ (Σχήμα 3).

Η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο, μέχρι να εντοπιστεί το σύνολο των διαφορετικών (όσον αφορά τις τιμές των μεταβλητών απόφασης) βέλτιστων λύσεων του προβλήματος του κάτω επιπέδου για όλες τις πιθανές περιοχές τιμών του p_1. Σε εκείνο το σημείο, είναι εύκολο να υπολογιστεί η ολικά βέλτιστη λύση του αρχικού διεπίπεδου μοντέλου βελτιστοποίησης, λόγω της ακόλουθης ανάλυσης. Για οποιαδήποτε περιοχή τιμών του p_1 στην οποία η βέλτιστη λύση του προβλήματος του κάτω επιπέδου παραμένει η ίδια, υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν ο μεμονωμένος παραγωγός καθορίζει την οριακή τιμή του συστήματος, δηλαδή, όταν η τιμή προσφοράς του είναι ίση με τη σκιώδη τιμή του περιορισμού της ζήτησης. Για τη συγκεκριμένη περιοχή τιμών του p_1, ο μεμονωμένος παραγωγός επιτυγχάνει το μέγιστο κέρδος του όταν η τιμή προσφοράς είναι ίση με το δεξί άκρο του αντίστοιχου διαστήματος τιμών του p_1. Για να γίνει κατανοητό γιατί ισχύει αυτό, τονίζεται ότι αφού η οριακή τιμή του συστήματος καθορίζεται από το μεμονωμένο παραγωγό σε αυτό το διάστημα, αυτή είναι η μέγιστη δυνατή τιμή που μπορεί να λάβει για κάθε MWh ενέργειας που θα παράσχει. Υποβάλλοντας μεγαλύτερη τιμή προσφοράς θα οδηγήσει σε διαφορετική βέλτιστη λύση για το πρόβλημα του κάτω επιπέδου, οδηγώντας σε διαφορετικό διάστημα τιμών για το p_1.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν η οριακή τιμή του συστήματος δεν καθορίζεται από το μεμονωμένο, αλλά από κάποιον άλλο παραγωγό. Για μια τέτοια περιοχή τιμών, ο μεμονωμένος παραγωγός είναι αδιάφορος για τη συγκεκριμένη τιμή του p_1, δεδομένου ότι θα αποζημιωθεί σύμφωνα με τη σταθερή οριακή τιμή του συστήματος. Παράλληλα, το κέρδος του παραμένει σταθερό στη συγκεκριμένη περιοχή και μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, δεδομένου ότι η ποσότητα που θα παραγάγει παραμένει επίσης σταθερή.



Σχήμα 3. Νέα όρια της $f^*(p_1)$.

Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο παραπάνω περιπτώσεων είναι ότι στην πρώτη, το κέρδος του μεμονωμένου παραγωγού αυξάνεται γραμμικά με την τιμή προσφοράς του εντός της συγκεκριμένης περιοχής τιμών του p_1, ενώ στη δεύτερη, παραμένει σταθερό. Συγκρίνοντας το μέγιστο κέρδος που ο μεμονωμένος παραγωγός μπορεί να επιτύχει σε οποιαδήποτε περιοχή τιμών του p_1 (καθεμία από τις οποίες συνδέεται με μια συγκεκριμένη βέλτιστη λύση για το πρόβλημα του κάτω επιπέδου), μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε τη βέλτιστη τιμή της p_1 που οδηγεί στο μέγιστο κέρδος του.

Για να προσδιοριστούν οι κατάλληλοι περιορισμοί που θα μπορέσουν, βάσει των τιμών της p_1 που βρέθηκαν από την παραμετρική επίλυση του προβλήματος του κάτω επιπέδου που περιγράφηκε, να χαλαρώσουν το πρόβλημα του μεμονωμένου παραγωγού, θέτοντας όρια στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος εφαρμόζονται τα ακόλουθα:

Έστω $z_1*(p_1)$ και $q_1*(p_1)$ οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης z_1 και q_1, αντίστοιχα, στη λύση του προβλήματος του κάτω επιπέδου, ως συνάρτηση της τιμής προσφοράς του μεμονωμένου παραγωγού. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επιταχυνθεί αισθητά, όταν χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο σημαντικό θεωρητικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 2: Η συνάρτηση $q_1*(p_1)$ είναι μη-αύξουσα.

Απόδειξη: Η κλίση κάθε ευθύγραμμου τμήματος που συνθέτει τη συνάρτηση $f*(p_1)$ είναι ίση με την βέλτιστη ποσότητα ενέργειας της πρώτης μονάδας, q_1* στην λύση που προκύπτει όταν η p_1 θέτεται ίση με το αριστερό άκρο του αντίστοιχου διαστήματος. Η ισχύς της πρότασης προκύπτει από το γεγονός ότι η $f*(p_1)$ είναι κοίλη.

Η σπουδαιότητα της Πρότασης 2 έγκειται στο ότι κάθε φορά που γνωρίζουμε τη βέλτιστη τιμή του q_1 για κάποιο $p_1 = t$, τότε αυτή η τιμή μπορεί να επιβληθεί ως ένα άνω όριο της βέλτιστης τιμής του q_1 για οποιοδήποτε πρόβλημα στο οποίο το p_1 είναι μεγαλύτερο από t. Επιπλέον, κάθε φορά που έχουμε προσδιορίσει μια τιμή t του p_1 για την οποία $z_1*(t) = 0$, τότε δε χρειάζεται να εφαρμοστεί η παραμετρική διαδικασία αναζήτησης στην περιοχή τιμών $\left(t, \overline{P}\right]$, καθώς η Πρόταση 2 εξασφαλίζει ότι η πρώτη μονάδα δεν θα συμμετέχει στην αγορά στη συγκεκριμένη περιοχή και το αντίστοιχο κέρδος της θα είναι ίσο με 0. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου, ιδίως για προβλήματα μεγάλης κλίμακας.

Στο δεύτερο στάδιο της βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα που έχουν βρεθεί για τις βέλτιστες τιμές του κέρδους του στρατηγικού παραγωγού. Για κάθε διακριτή βέλτιστη λύση του κάτω προβλήματος, αντιστοιχεί μια ποσότητας ενέργειας που προσφέρεται από τον στρατηγικό παραγωγό, και κατά συνέπεια το αντίστοιχο κέρδος του, και είτε αυτός καθορίζει την οριακή τιμή του συστήματος είτε αυτή καθορίζεται από άλλον παραγωγό. Το ολικό βέλτιστο του προβλήματος μπορεί να βρεθεί με την σύγκριση των βέλτιστων τιμών του κέρδους που βρέθηκαν από το πρόβλημα του κάθε επίπεδου. Ο αλγόριθμος αυτός επίλυσης περιγράφεται από τους Kozanidis et al. (2013).

Ειδικότερα για να επιτευχθεί η χαλάρωση του προβλήματος παράγονται ισχύουσες ανισότητες (valid inequalities), και αναπτύσσεται ένα αλγόριθμος επίπεδων τομών (cutting-plane) που εντοπίζει το ολικό βέλτιστο του προβλήματος. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιεί τις valid inequalitiesγια να θέσει όρια (cutoff) στην βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Για την χρήση των ανισοτήτων αυτών υιοθετούνται ευφυείς τεχνικές μοντελοποίησης μέσω δυαδικών μεταβλητών.

Κεφάλαιο 4 Εφαρμογή του Αλγόριθμου

4.1 Μελέτη Περίπτωσης

Στην ενότητα αυτή, επιδεικνύουμε την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου σε μια μελέτη περίπτωσης με πέντε (5) μονάδες παραγωγής. Τα τεχνικά χαρακτηριστικά, οι τιμές-προσφοράς και τα κόστη εκκίνησης των μονάδων παραγωγής παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Τα τεχνικά ελάχιστα και μέγιστα δίνονται σε MW, τα κόστη εκκίνησης σε € και οι τιμές-προσφοράς για την ενέργεια σε €/MWh. Το μεταβλητό κόστος του μεμονωμένου παραγωγού (της μονάδας 1) είναι 50 €/MWh, το άνω όριο στην τιμή προσφοράς του είναι150 €/MWh και η ζήτηση για ενέργεια είναι ίση με 1,000 MWh. Τα δεδομένα των μονάδων παραγωγής δεν είναι πλασματικά, αλλά αντιστοιχούν σε μονάδες που συμμετέχουν στην ελληνική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας, όπως περιγράφεται από τους Andrianesis et al. (2009).

Πίνακας 1. Τεχνικά χαρακτηριστικά, τιμές προσφοράς και κόστη εκκίνησης των μονάδων παραγωγής

Μονάδα (*i*)	m_i	k_i	p_i	s_i
1	240	377	-	13,000
2	144	476	52	10,000
3	240	384	57	15,000
4	105	188	65	27,000
5	60	144	72	24,000

4.2 Επίλυση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η εφαρμογή για την μελέτη περίπτωση που παρουσιάστηκε. Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό βελτιστοποίησης Lingo 13.Το πρόβλημα του κάτω επιπέδου επιλύεται για κάθε συνδυασμό των μονάδων παραγωγής. Οι συνδυασμοί είναι συνολικά για τις πέντε μονάδες, 2^5 =32. Η μορφοποίηση για τις πέντε μονάδες του προβλήματος είναι:

$$\min f = \sum_{1}^{5} p_i q_i$$

$$\text{s.t.} \sum_{1}^{5} q_i = d$$

$$m_i z_i \le q_i \le k_i z_i, i \in [1,5]$$

$$z_i \text{ binary}, \forall\, i \in [1,5]$$

$$q_i \ge 0, i \in [1,5]$$

Στη μορφοποίηση αυτή δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος εκκίνησης του παραγωγού s_i, γιατί δεν επηρεάζει την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης:

Θεωρούμε την περίπτωση που λειτουργούν όλες οι μονάδες $(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = 1, z_5 = 1)$:

Με την χρήση του λογισμικού βελτιστοποίησης Lingo 13 και για $p_1 = c_1 = 50$ και $p_1 = \overline{P} = 150$ αντίστοιχα:

```
MIN = P1*q1 + 52*q2 + 57*q3 + 65*q4 + 72*q5;

!SUBJECT TO:;
q1+q2+q3+q4+q5=1000; !DEMAND;
z1=1; z2=1; z3=1; z4=1; z5=1;
q1 >= z1*240; q2 >= z2*144; q3 >= z3*240; q4 >= z4*105; q5 >= z5*60; !TECHNICAL
MINIMUM;
q1 <= z1*377; q2 <= z2*476; q3 <= z3*384; q4 <= z4*188; q5 <= z5*144; !TECHNICAL
MAXIMUM;
P1= 50;

gradient=  52*q2 + 57*q3 + 65*q4 + 72*q5;
```

και προκύπτουν οι ακόλουθες λύσεις:

για $p_1 = 50$:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              55011.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.07

  Model Class:                                        LP

  Total variables:                      6
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   13
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                      25
  Nonlinear nonzeros:                   0


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      P1        50.00000            0.000000
                                      Q1        377.0000            0.000000
                                      Q2        218.0000            0.000000
                                      Q3        240.0000            0.000000
                                      Q4        105.0000            0.000000
                                      Q5        60.00000            0.000000
                                      Z1        1.000000            0.000000
                                      Z2        1.000000            0.000000
                                      Z3        1.000000            0.000000
                                      Z4        1.000000            0.000000
                                      Z5        1.000000            0.000000
                                GRADIENT        36161.00            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        55011.00           -1.000000
                                       2        0.000000           -52.00000
                                       3        0.000000            754.0000
                                       4        0.000000            0.000000
                                       5        0.000000           -1200.000
                                       6        0.000000           -1365.000
                                       7        0.000000           -1200.000
                                       8        137.0000            0.000000
                                       9        74.00000            0.000000
                                      10        0.000000           -5.000000
                                      11        0.000000           -13.00000
                                      12        0.000000           -20.00000
                                      13        0.000000            2.000000
                                      14        258.0000            0.000000
                                      15        144.0000            0.000000
                                      16        83.00000            0.000000
                                      17        84.00000            0.000000
                                      18        0.000000           -377.0000
                                      19        0.000000            0.000000
```

Για $p_1 = 150$:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              79285.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.07

  Model Class:                                        LP

  Total variables:                      6
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   13
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                      25
  Nonlinear nonzeros:                   0
```

Variable	Value	Reduced Cost
P1	150.0000	0.000000
Q1	240.0000	0.000000
Q2	355.0000	0.000000
Q3	240.0000	0.000000
Q4	105.0000	0.000000
Q5	60.00000	0.000000
Z1	1.000000	0.000000
Z2	1.000000	0.000000
Z3	1.000000	0.000000
Z4	1.000000	0.000000
Z5	1.000000	0.000000
GRADIENT	43285.00	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	79285.00	-1.000000
2	0.000000	-52.00000
3	0.000000	-23520.00
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	-1200.000
6	0.000000	-1365.000
7	0.000000	-1200.000
8	0.000000	-98.00000
9	211.0000	0.000000
10	0.000000	-5.000000
11	0.000000	-13.00000
12	0.000000	-20.00000
13	137.0000	0.000000
14	121.0000	0.000000
15	144.0000	0.000000
16	83.00000	0.000000
17	84.00000	0.000000
18	0.000000	-240.0000
19	0.000000	0.000000

Επειδή, $x^*(c_1) = x^*(50) \neq x^*(\overline{P}) = x^*(150)$ προχωράμε στην επόμενη επανάληψη.

Από τις κλίσεις (gradients) λαμβάνουμε: $36161 + 377p_1 = 43285 + 240p_1 \Rightarrow p_1 = 52$

Και από το Lingo για $p_1 = 52$

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              55765.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          1.19

  Model Class:                                        LP

  Total variables:                      6
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   13
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                      25
  Nonlinear nonzeros:                   0
```

Variable	Value	Reduced Cost
P1	52.00000	0.000000
Q1	240.0000	0.000000
Q2	355.0000	0.000000
Q3	240.0000	0.000000
Q4	105.0000	0.000000
Q5	60.00000	0.000000
Z1	1.000000	0.000000
Z2	1.000000	0.000000
Z3	1.000000	0.000000
Z4	1.000000	0.000000
Z5	1.000000	0.000000
GRADIENT	43285.00	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	55765.00	-1.000000
2	0.000000	-52.00000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	-1200.000
6	0.000000	-1365.000
7	0.000000	-1200.000
8	0.000000	0.000000
9	211.0000	0.000000
10	0.000000	-5.000000
11	0.000000	-13.00000
12	0.000000	-20.00000
13	137.0000	0.000000
14	121.0000	0.000000
15	144.0000	0.000000
16	83.00000	0.000000
17	84.00000	0.000000
18	0.000000	-240.0000
19	0.000000	0.000000

Και επειδή, $f^*(52) = 43285 + 240 * 52 = 55765$ το $p_1 = 52$ είναι η βέλτιστη τιμή προσφοράς και έχουμε για $(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = 1, z_5 = 1)$ προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.

Πίνακας 2. Αποτελέσματα της εφαρμογής του αλγόριθμου επίλυσης για $(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = 1, z_5 = 1)$.

Περιοχή-τιμών του p_1	Βέλτιστη λύση προβλήματος κάτω επιπέδου	Οριακή τιμή συστήματος	Οριακή μονάδα παραγωγής	f^*	F
[50, 52]	(377, 218, 240, 105, 60)	52	2	36,161+ 377 p_1	754
[52, 150]	(240, 355, 240, 105, 60)	52	2	43,285 + 240 p_1	480

Παρατίθεται ένα ακόμα ενδεικτικό παράδειγμα για την περίπτωση που δεν λειτουργούν οι μονάδες τρία ($i = 3$) και πέντε ($i = 5$), $(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0)$:

Για την περίπτωση αυτή και για $p_1 = c_1 = 50$ και $p_1 = \overline{P} = 150$ έχουμε:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              53157.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.05

  Model Class:                                        LP

  Total variables:                      6
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   13
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                      25
  Nonlinear nonzeros:                   0


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      P1        50.00000            0.000000
                                      Q1        377.0000            0.000000
                                      Q2        476.0000            0.000000
                                      Q3        0.000000            0.000000
                                      Q4        147.0000            0.000000
                                      Q5        0.000000            7.000000
                                      Z1        1.000000            0.000000
                                      Z2        1.000000            0.000000
                                      Z3        0.000000            0.000000
```

Z4	1.000000	0.000000
Z5	0.000000	0.000000
GRADIENT	34307.00	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	53157.00	-1.000000
2	0.000000	-65.00000
3	0.000000	5655.000
4	0.000000	6188.000
5	0.000000	3072.000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	137.0000	0.000000
9	332.0000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	42.00000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	0.000000	15.00000
14	0.000000	13.00000
15	0.000000	8.000000
16	41.00000	0.000000
17	0.000000	0.000000
18	0.000000	-377.0000
19	0.000000	0.000000

για $p_1 = \overline{P} = 150$:

```
Global optimal solution found.
 Objective value:                              87372.00
 Infeasibilities:                              0.000000
 Total solver iterations:                             0
 Elapsed runtime seconds:                          0.08

 Model Class:                                        LP

 Total variables:                      6
 Nonlinear variables:                  0
 Integer variables:                    0

 Total constraints:                   13
 Nonlinear constraints:                0

 Total nonzeros:                      25
 Nonlinear nonzeros:                   0
```

Variable	Value	Reduced Cost
P1	150.0000	0.000000
Q1	336.0000	0.000000
Q2	476.0000	0.000000
Q3	0.000000	0.000000
Q4	188.0000	0.000000
Q5	0.000000	0.000000
Z1	1.000000	0.000000
Z2	1.000000	0.000000
Z3	0.000000	0.000000
Z4	1.000000	0.000000
Z5	0.000000	0.000000
GRADIENT	36972.00	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	87372.00	-1.000000
2	0.000000	-150.0000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	46648.00
5	0.000000	35712.00
6	0.000000	15980.00
7	0.000000	11232.00
8	96.00000	0.000000
9	332.0000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	83.00000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	41.00000	0.000000
14	0.000000	98.00000
15	0.000000	93.00000
16	0.000000	85.00000
17	0.000000	78.00000
18	0.000000	-336.0000
19	0.000000	0.000000

Επειδή, $x^*(c_1) = x^*(50) \neq x^*(\overline{P}) = x^*(150)$ προχωράμε στην επόμενη επανάληψη.

Από τις κλίσεις (gradients) λαμβάνουμε: $34307 + 377p_1 = 36972 + 336p_1 \Rightarrow p_1 = 65$

Και από το Lingo για $p_1 = 65$

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              58812.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.11

  Model Class:                                        LP

  Total variables:                      6
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   13
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                      25
  Nonlinear nonzeros:                   0
```

Variable	Value	Reduced Cost
P1	65.00000	0.000000
Q1	377.0000	0.000000
Q2	476.0000	0.000000
Q3	0.000000	0.000000
Q4	147.0000	0.000000
Q5	0.000000	7.000000
Z1	1.000000	0.000000
Z2	1.000000	0.000000
Z3	0.000000	0.000000
Z4	1.000000	0.000000
Z5	0.000000	0.000000
GRADIENT	34307.00	0.000000

```
Row    Slack or Surplus      Dual Price
  1        58812.00          -1.000000
  2        0.000000          -65.00000
  3        0.000000           0.000000
  4        0.000000           6188.000
  5        0.000000           3072.000
  6        0.000000           0.000000
  7        0.000000           0.000000
  8        137.0000           0.000000
  9        332.0000           0.000000
 10        0.000000           0.000000
 11        42.00000           0.000000
 12        0.000000           0.000000
 13        0.000000           0.000000
 14        0.000000           13.00000
 15        0.000000           8.000000
 16        41.00000           0.000000
 17        0.000000           0.000000
 18        0.000000          -377.0000
 19        0.000000           0.000000
```

Και επειδή, $f^*(65) = 34307 + 377 * 65 = 58812$ το $p_1 = 65$ είναι η βέλτιστη τιμή προσφοράς και έχουμε για $(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0)$ προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.

Πίνακας 3. Αποτελέσματα της εφαρμογής του αλγόριθμου επίλυσης για $(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0)$.

Περιοχή-τιμών του p_1	Βέλτιστη λύση προβλήματος κάτω επιπέδου	Οριακή τιμή συστήματος	Οριακή μονάδα παραγωγής	f^*	F
[50, 65]	(377, 476, 0, 147, 0)	52	4	34,307 + 377 p_1	2639
[66, 150]	(336, 476, 0, 188, 0)	p_1	1	36,972 + 336 p_1	$(p_1 - 50) * 336$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για όλες τους συνδυασμούς μονάδων προκύπτει ο πίνακας 4:

Πίνακας 4. Αποτελέσματα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ.

α/α	Παραγωγοί που συμμετέχουν $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$	Εφαρμοσιμότητα (feasibility)	p_1	f^*	F	Οριακή μονάδα παραγωγής
1	$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$	εφικτό	[50,51]	36161+377 p_1	754	2^{η}
			[52,150]	43285+240 p_1	480	2^{η}
2	$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=0)$	εφικτό	[50,51]	34961+377 p_1	754	2^{η}
			[52,150]	42085+240 p_1	480	2^{η}
3	$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=1)$	εφικτό	[50,51]	34796+377 p_1	754	2^{η}
			[52,150]	41920+240 p_1	480	2^{η}
4	$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=0)$	εφικτό	[50,52]	33596+377 p_1	754	2^{η}
			[53,56]	38432+284 p_1	(p_1 -50)*284	1^{η}
			[57,150]	40940+240 p_1	1988	3^{η}
5	$(z_1=1, z_2=1, z_3=0, z_4=1, z_5=1)$	εφικτό	[50,52]	34961+377 p_1	754	2^{η}
			[53,65]	35897+359 p_1	(p_1 -50)*359	1^{η}
			[66,71]	41992+276 p_1	(p_1 -50)*276	1^{η}
			[72,150]	43884+240 p_1	5280	5^{η}
6	$(z_1=1, z_2=1, z_3=0, z_4=1, z_5=0)$	εφικτό	[50,65]	34307+377 p_1	2639	4^{η}
			[66,150]	36972+336 p_1	(p_1 -50)*336	1^{η}
7	$(z_1=1, z_2=1, z_3=0, z_4=0, z_5=1)$	μη εφικτό				
8	$(z_1=1, z_2=1, z_3=0, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				
9	$(z_1=1, z_2=0, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$	εφικτό	[50,65]	37843+377 p_1	2639	4^{η}
			[66,72]	38428+368 p_1	(p_1 -50)*368	1^{η}
			[73,150]	44476+284 p_1	(p_1 -50)*284	1^{η}
10	$(z_1=1, z_2=0, z_3=1, z_4=1, z_5=0)$	μη εφικτό				
11	$(z_1=1, z_2=0, z_3=1, z_4=0, z_5=1)$	μη εφικτό				
12	$(z_1=1, z_2=0, z_3=1, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				
13	$(z_1=1, z_2=0, z_3=0, z_4=1, z_5=1)$	μη εφικτό				
14	$(z_1=1, z_2=0, z_3=0, z_4=1, z_5=0)$	μη εφικτό				
15	$(z_1=1, z_2=0, z_3=0, z_4=0, z_5=1)$	μη εφικτό				
16	$(z_1=1, z_2=0, z_3=0, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				
17	$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$	εφικτό		56360		3^{η}
18	$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=0)$	εφικτό		55740		4^{η}
19	$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=1)$	εφικτό		56720		5^{η}
20	$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				
21	$(z_1=0, z_2=1, z_3=0, z_4=1, z_5=1)$	μη εφικτό				
22	$(z_1=0, z_2=1, z_3=0, z_4=1, z_5=0)$	μη εφικτό				
23	$(z_1=0, z_2=1, z_3=0, z_4=0, z_5=1)$	μη εφικτό				
24	$(z_1=0, z_2=1, z_3=0, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				
25	$(z_1=0, z_2=0, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$	μη εφικτό				
26	$(z_1=0, z_2=0, z_3=1, z_4=1, z_5=0)$	μη εφικτό				
27	$(z_1=0, z_2=0, z_3=1, z_4=0, z_5=1)$	μη εφικτό				
28	$(z_1=0, z_2=0, z_3=1, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				
29	$(z_1=0, z_2=0, z_3=0, z_4=1, z_5=1)$	μη εφικτό				
30	$(z_1=0, z_2=0, z_3=0, z_4=1, z_5=0)$	μη εφικτό				
31	$(z_1=0, z_2=0, z_3=0, z_4=0, z_5=1)$	μη εφικτό				
32	$(z_1=0, z_2=0, z_3=0, z_4=0, z_5=0)$	μη εφικτό				

Το επόμενο βήμα είναι η επιλογή των κατάλληλων επίπεδων τομών (cuts) για επιβολή ορίων στην αντικειμενική συνάρτηση με την μορφή ανισοτήτων- μέγιστου και ελάχιστου για την αντικειμενική συνάρτηση- κέρδος στρατηγικού παραγωγού.

Στην περίπτωση που λειτουργούν όλες οι μονάδες θα είναι:

Πίνακας 5. Valid inequalities για όλες τις μονάδες σε λειτουργία.

Περιοχή-τιμών του p_1	Οριακή μονάδα παραγωγής	F	Δυαδικές μεταβλητές	F -valid inequalities
[50, 52]	2	754	w1>=(52-p1)/2	754-((6-z1-z2-z3-z4-z5-w1)*M)<= F <= 754+((6-z1-z2-z3-z4-z5-w1)*M)
[52, 150]	2	480	w2>=(p1-51)/99	480-((6-z1-z2-z3-z4-z5-w2)*M)<= F <= 480+((6-z1-z2-z3-z4-z5-w2)*M)

Όπου με w συμβολίζονται οι δυαδικές μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάθε διάστημα τιμών. Εδώ βλέπουμε πως για το διάστημα [50, 52] πάντα w_1=1 ενώ για το διάστημα [52, 150] w_2=1. M είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός που εξασφαλίζει πως όταν δεν λειτουργεί ο συνδυασμός μονάδων ή και το διάστημα που αντιστοιχούν στον περιορισμό- ισχύουσα ανισότητα αυτή ισχύει πάντα και δεν επηρεάζει την αντικειμενική συνάρτηση.

Αντίστοιχα για την περίπτωση που δεν λειτουργούν οι μονάδες τρία $i = 3$ και πέντε, $i = 5$, $\left(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0\right)$ προκύπτει πίνακας 6:

Πίνακας 6. Valid inequalities για $\left(z_1 = 1, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0\right)$.

Περιοχή-τιμών του p_1	Οριακή μονάδα παραγωγής	F	Δυαδικές μεταβλητές	F -valid inequalities
[50,65]	4	2639	w17>=(66-p1)/16	2639-((4-z1-z2+z3-z4+z5-w17)*M) <= F <= 2639((4-z1-z2+z3-z4+z5-w17)*M)
[66,150]	1	(p_1 -50)*336	w18>=(p1-65)/85	(P1-50)*336-((4-z1-z2+z3-z4+z5-w18)*M) <= F <= (P1-50)*336+((4-z1-z2+z3-z4+z5-w18)*M)

Αντίστοιχα προκύπτουν οι ανισότητες και για τους υπόλοιπους συνδυασμούς και αποτυπώνονται στον Πίνακα 6. Αντίστοιχες ανισότητες εφαρμόζονται και για τις ποσότητες με τις οποίες συμμετέχει ο κάθε παραγωγός για κάθε συνδυασμό μονάδων και για κάθε διάστημα της τιμής προσφοράς p_1.

Από το πρόβλημα του ανεξάρτητου διαχειριστή του συστήματος βλέπουμε πως για $p_1 \geq 112$ σύστημα βγάζει έκτος τον στρατηγικό παραγωγό, ενώ για $p_1 < 112$ βγάζει εκτός του παραγωγό 4 και τον παραγωγό 5. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 με δυαδικές μεταβλητές στο πρόβλημα εκφράζουμε τον αποκλεισμό αυτό. Οι αντίστοιχες μεταβλητές μορφοποιούνται ως εξής:

W23>=(P1-111)/39, z1<=1-W23.
W24>=(112-P1)/62, z4<=1-W24 και z5<=1-W24.

Το σύνολο των δυαδικών μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν στην επίλυση παρουσιάζεται στον πίνακα 7.

Πίνακας 7. Valid inequalities του συστήματος.

Παραγωγοί που συμμετέχουν $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$	p_1	F	Δυαδικές μεταβλητές		F- valid inequalities
$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$	[50,51]	754	w1>=(52-p1)/2		754-((6-z1-z2-z3-z4-z5-w1)*M)<= F <= 754+((6-z1-z2-z3-z4-z5-w1)*M)
	[52,150]	480	w2>=(p1-51)/99		480-((6-z1-z2-z3-z4-z5-w2)*M)<= F <= 480+((6-z1-z2-z3-z4-z5-w2)*M)
$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=0)$	[50,51]	754	w3>=(52-p1)/2		754-((5-z1-z2-z3-z4+z5-w3)*M) <= F <= 754+((5-z1-z2-z3-z4+z5-w1)*M)
	[52,150]	480	w4>=(p1-51)/99		480-((5-z1-z2-z3-z4+z5-w4)*M) <= F <= 480+((5-z1-z2-z3-z4+z5-w4)*M)
$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=1)$	[50,51]	754	w5>=(51-p1)/2		754-((5-z1-z2-z3+z4-z5-w5)*M)<= F <= 754+((5-z1-z2-z3+z4-z5-w5)*M)
	[52,150]	480	w6>=(p1-51)/99		480((5-z1-z2-z3+z4-z5-w6)*M) <= F <= 480+((5-z1-z2-z3+z4-z5-w6)*M)
$(z_1=1, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=0)$	[50,52]	754	w7>=(53-p1)/3		754-((4-z1-z2-z3+z4+z5-w7)*M) <= F <= 754+((4-z1-z2-z3+z4+z5-w7)*M)
	[53,56]	(p_1 -50)*284	w8>=(p1-52)/98	w9>=(57-p1)/7	(P1-50)*284-((5-z1-z2-z3+z4+z5-w8-w9)*M) <= F <= (P1-50)*284 +((5-z1-z2-z3+z4+z5-w8-w9)*M)
	[57,150]	1988	w10>=(p1-56)/94		1988-((4-z1-z2-z3+z4+z5-w10)*M) <= F<= 1988+((4-z1-z2-z3+z4+z5-w10)*M)
$(z_1=1, z_2=1, z_3=0, z_4=1, z_5=1)$	[50,52]	754	w11>=(53-p1)/3		754-((5-z1-z2+z3-z4+z5-w11)*M) <=F <= 754+((5-z1-z2+z3-z4+z5-w11)*M)
	[53,65]	(p_1 -50)*359	w12>=(p1-52)/98	w13>=(66-p1)/16	(P1-50)*359-((6-z1-z2+z3-z4-z5-w12-w13)*M) <= F <= (P1-50)*359-((6-z1-z2+z3-z4-z5-w12-w13)*M)
	[66,71]	(p_1 -50)*276	w14>=(p1-65)/85	w15>=(72-p1)/22	(P1-50)*276-((6-z1-z2+z3-z4-z5-w14-w15)*M) <= F<= (P1-50)*276-((6-z1-z2+z3-z4-z5-w12-w13)*M)
	[72,150]	5280	w16>=(p1-71)/79		5280- ((5-z1-z2+z3-z4+z5-w16)*M) <= F <= 5280+((5-z1-z2+z3-z4+z5-w16)*M)
$(z_1=1, z_2=1, z_3=0, z_4=1, z_5=0)$	[50,65]	2639	w17>=(66-p1)/16		2639-((4-z1-z2+z3-z4+z5-w17)*M) <= F <= 2639((4-z1-z2+z3-z4+z5-w17)*M)
	[66,150]	(p_1 -50)*336	w18>=(p1-65)/85		(P1-50)*336-((4-z1-z2+z3-z4+z5-w18)*M) <= F <= (P1-50)*336+((4-z1-z2+z3-z4+z5-w18)*M)
$(z_1=1, z_2=0, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$	[50,65]	2639	w19>=(66-p1)/16		2639-((5-z1+z2-z3-z4-z5-w19)*M)<= F <= 2639+-((5-z1+z2-z3-z4-z5-w19)*M)
	[66,72]	(p_1 -50)*368	w20>=(p1-65)/85	w21>=(73-p1)/23	(P1-50)*368-((6-z1+z2-z3-z4-z5-w20-W21)*M) <= F<= (P1-50)*368+-((6-z1+z2-z3-z4-z5-w20-W21)*M)
	[73,150]	(p_1 -50)*284	w22>=(p1-72)/78		(P1-50)*284-((5-z1+z2-z3-z4-z5-w22)*M) <= F <= (P1-50)*284+((5-z1+z2-z3-z4-z5-w22)*M))
$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=1)$		0			0-((4+z1-z2-z3-z4-z5)*M) <= F <= 0+((4+z1-z2-z3-z4-z5)*M)
$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=1, z_5=0)$		0			0-((3+z1-z2-z3-z4+z5)*M) <= F <= 0+((3+z1-z2-z3-z4+z5)*M)
$(z_1=0, z_2=1, z_3=1, z_4=0, z_5=1)$		0			0-((3+z1-z2-z3+z4-z5)*M) <= F <= 0+((3+z1-z2-z3+z4-z5)*M)

Το πρόβλημα του στρατηγικού παραγωγού μοντελοποιείται στο Lingo 13 ως:

```
MAX = F1;

F1 <= M*Z1;
!SUBJECT TO:;

Q1+Q2+Q3+Q4+Q5=1000; !DEMAND;
Q1 >= z1*240; Q2 >= z2*144; Q3 >= z3*240; Q4 >= z4*105; Q5 >= z5*60; !TECHNICAL
MINIMUM;
Q1 <= z1*377; Q2 <= z2*476; Q3 <= z3*384; Q4 <= z4*188; Q5 <= z5*144; !TECHNICAL
MAXIMUM;

@BIN (z1); @BIN (z2); @BIN (z3); @BIN (z4); @BIN (z5);
!valid inequalities:;

W1 >= (52-P1)/2; W2 >= (P1-51)/99; W3 >= (52-P1)/2; W4 >= (P1-51)/99; W5 >=
(52-P1)/2; W6 >= (P1-51)/99; W7 >= (53-P1)/3; W8 >= (P1-52)/98; W9 >= (57-
P1)/7; W10 >= (P1-56)/94; W11 >= (53-P1)/3;
```

```
W12 >= (P1-52)/98; W13 >= (66-P1)/16; W14 >= (P1-65)/85; W15 >= (72-P1)/22;
W16 >= (P1-71)/79; W17 >= ((66-P1)/16) ; W18 >= ((P1-65)/85); W19 >= (66-
P1)/16; W20 >= (P1-65)/85; W21 >= (73-P1)/23; W22 >= (P1-72)/78;

!Add for P1>=112 z1=0;

W23>=(P1-111)/39; z1<=1-W23;

W24>=(112-P1)/62;  z4<=1-W24; z5<=1-W24;

@GIN (P1);

P1 >= 50;
P1 <= 150;

@BIN (W1); @BIN (W2); @BIN (W3); @BIN (W4); @BIN (W5); @BIN (W6); @BIN
(W7); @BIN (W8); @BIN (W9); @BIN (W10);  @BIN (W11);
@BIN (W12); @BIN (W13); @BIN (W14); @BIN (W15); @BIN (W16); @BIN (W17);
@BIN (W18); @BIN (W19); @BIN (W20); @BIN (W21); @BIN (W22); @BIN(W23); @BIN
(W24);


! F1 - Valid inequalities:;

F1>=  754-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);  F1 <=  754+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);

F1>=  480-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);  F1 <=  480+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);

F1>=  754-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);  F1 <=  754+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);

F1>=  480-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);  F1 <=  480+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);

F1>=  754-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);  F1 <=  754+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);

F1>=  480-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);  F1 <=  480+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);

F1>=  754-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);  F1 <=  754+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);

F1>=  (P1-50)*284-((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);  F1<=  (P1-50)*284 +((5-z1-
z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);

F1>=  1988-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);  F1<=  1988+((4-z1-z2-z3+z4+z5-
W10)*M);

F1>=  754-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M); F1  <=  754+((5-z1-z2+z3-z4-z5-
W11)*M);

F1>=  (P1-50)*359-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);  F1 <=  (P1-50)*359+((6-
z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);

F1>=  (P1-50)*276-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);  F1<=  (P1-50)*276+((6-
z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);

F1>=  5280-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);  F1 <=  5280+((5-z1-z2+z3-z4-z5-
W16)*M);
```

```
F1>=  2639-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);  F1 <=  2639+((4-z1-z2+z3-z4+z5-
W17)*M);

F1>=  (P1-50)*336-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);  F1 <=  (P1-50)*336+((4-z1-
z2+z3-z4+z5-W18)*M);

F1>=  2639-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);  F1 <=  2639+((5-z1+z2-z3-z4-z5-
W19)*M);

F1>=  (P1-50)*368-((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);  F1<=  (P1-50)*368+((6-
z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);

F1>=  (P1-50)*284-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);  F1 <=  (P1-50)*284+((5-
z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);

! Q1 - Valid inequalities:;

Q1>=  377-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);  Q1 <=  377+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);

Q1>=  240-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);  Q1 <=  240+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);

Q1>=  377-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);  Q1 <=  377+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);

Q1>=  240-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);  Q1 <=  240+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);

Q1>=  377-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);  Q1 <=  377+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);

Q1>=  240-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);  Q1 <=  240+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);

Q1>=  377-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);  Q1 <=  377+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);

Q1>=  284-((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);  Q1<=  284 +((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-
W9)*M);

Q1>=  240-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);  Q1<=  240+((4-z1-z2-z3+z4+z5-
W10)*M);

Q1>=  377-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M); Q1  <=  377+((5-z1-z2+z3-z4-z5-
W11)*M);

Q1>=  359-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);  Q1 <=  359+((6-z1-z2+z3-z4-z5-
W12-W13)*M);

Q1>=  276-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);  Q1<=  276+((6-z1-z2+z3-z4-z5-
W14-W15)*M);

Q1>=  240-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);  Q1 <=  240+((5-z1-z2+z3-z4-z5-
W16)*M);

Q1>=  377-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);  Q1 <=  377+((4-z1-z2+z3-z4+z5-
W17)*M);

Q1>=  336-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);  Q1 <=  336+((4-z1-z2+z3-z4+z5-
W18)*M);
```

```
Q1>=  377-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);  Q1 <=  377+((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);

Q1>=  368-((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);  Q1<=  368+((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);

Q1>=  284-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);  Q1 <=  284+((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);

! Q2 - Valid inequalities:;

Q2>=  218-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);  Q2 <=  218+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);

Q2>=  355-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);  Q2 <=  355+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);

Q2>=  278-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);  Q2 <=  278+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);

Q2>=  415-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);  Q2 <=  415+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);

Q2>=  323-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);  Q2 <=  323+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);

Q2>=  460-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);  Q2 <=  460+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);

Q2>=  383-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);  Q2 <=  383+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);

Q2>=  476-((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);  Q2<=  476 +((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);

Q2>=  476-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);  Q2<=  476+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);

Q2>=  458-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M); Q2  <=  458+((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M);

Q2>=  476-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);  Q2 <=  476+((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);

Q2>=  476-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);  Q2<=  476+((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);

Q2>=  476-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);  Q2 <=  476+((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);

Q2>=  476-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);  Q2 <=  476+((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);

Q2>=  476-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);  Q2 <=  476+((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);

Q2>=  0-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);  Q2 <=  0+((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);

Q2>=  0-((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);  Q2<=  0+((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);

Q2>=  0-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);  Q2 <=  0+((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);
```

```
! Q3 - Valid inequalities:;

Q3>=  240-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);  Q3 <=  240+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);

Q3>=  240-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);  Q3 <=  240+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);

Q3>=  240-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);  Q3 <=  240+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);

Q3>=  240-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);  Q3 <=  240+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);

Q3>=  240-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);  Q3 <=  240+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);

Q3>=  240-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);  Q3 <=  240+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);

Q3>=  240-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);  Q3 <=  240+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);

Q3>=  240-((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);  Q3<=  240 +((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-
W9)*M);

Q3>=  284-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);  Q3<=  284+((4-z1-z2-z3+z4+z5-
W10)*M);

Q3>=  0-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M); Q3  <=  0+((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M);

Q3>=  0-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);  Q3 <=  0+((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-
W13)*M);

Q3>=  0-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);  Q3<=  0+((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-
W15)*M);

Q3>=  0-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);  Q3 <=  0+((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);

Q3>=  0-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);  Q3 <=  0+((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);

Q3>=  0-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);  Q3 <=  0+((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);

Q3>=  384-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);  Q3 <=  384+((5-z1+z2-z3-z4-z5-
W19)*M);

Q3>=  384-((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);  Q3<=  384+((6-z1+z2-z3-z4-z5-
W20-W21)*M);

Q3>=  384-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);  Q3 <=  384+((5-z1+z2-z3-z4-z5-
W22)*M);

! Q4 - Valid inequalities:;

Q4>=  105-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);  Q4 <=  105+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);

Q4>=  105-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);  Q4 <=  105+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);

Q4>=  105-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);  Q4 <=  105+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);

Q4>=  105-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);  Q4 <=  105+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);

Q4>=  0-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);  Q4 <=  0+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);
```

```
Q4>=  0-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);  Q4 <=  0+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);

Q4>=  0-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);  Q4 <=  0+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);

Q4>=  0-((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);  Q4<=  0 +((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-
W9)*M);

Q4>=  0-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);  Q4<=  0+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);

Q4>=  105-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M); Q4  <=  105+((5-z1-z2+z3-z4-z5-
W11)*M);

Q4>=  105-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);  Q4 <=  105+((6-z1-z2+z3-z4-z5-
W12-W13)*M);

Q4>=  188-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);  Q4<=  188+((6-z1-z2+z3-z4-z5-
W14-W15)*M);

Q4>=  188-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);  Q4 <=  188+((5-z1-z2+z3-z4-z5-
W16)*M);

Q4>=  147-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);  Q4 <=  147+((4-z1-z2+z3-z4+z5-
W17)*M);

Q4>=  188-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);  Q4 <=  188+((4-z1-z2+z3-z4+z5-
W18)*M);

Q4>=  179-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);  Q4 <=  179+((5-z1+z2-z3-z4-z5-
W19)*M);

Q4>=  188-((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);  Q4<=  188+((6-z1+z2-z3-z4-z5-
W20-W21)*M);

Q4>=  188-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);  Q4 <=  188+((5-z1+z2-z3-z4-z5-
W22)*M);

! Q5 - Valid inequalities:;

Q5>=  60-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);  Q5 <=  60+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W1)*M);

Q5>=  60-((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);  Q5 <=  60+((6-z1-z2-z3-z4-z5-W2)*M);

Q5>=  0-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);  Q5 <=  0+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W3)*M);

Q5>=  0-((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);  Q5 <=  0+((5-z1-z2-z3-z4+z5-W4)*M);

Q5>=  60-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);  Q5 <=  60+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W5)*M);

Q5>=  60-((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);  Q5 <=  60+((5-z1-z2-z3+z4-z5-W6)*M);

Q5>=  0-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);  Q5 <=  0+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W7)*M);

Q5>=  0-((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-W9)*M);  Q5<=  0 +((5-z1-z2-z3+z4+z5-W8-
W9)*M);

Q5>=  0-((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);  Q5<=  0+((4-z1-z2-z3+z4+z5-W10)*M);
```

```
Q5>=  60-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M); Q5  <=  60+((5-z1-z2+z3-z4-z5-W11)*M);

Q5>=  60-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-W13)*M);  Q5 <=  60+((6-z1-z2+z3-z4-z5-W12-
W13)*M);

Q5>=  60-((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-W15)*M);  Q5<=  60+((6-z1-z2+z3-z4-z5-W14-
W15)*M);

Q5>=  96-((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);  Q5 <=  96+((5-z1-z2+z3-z4-z5-W16)*M);

Q5>=  0-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);  Q5 <=  0+((4-z1-z2+z3-z4+z5-W17)*M);

Q5>=  0-((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);  Q5 <=  0+((4-z1-z2+z3-z4+z5-W18)*M);

Q5>=  60-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);  Q5 <=  60+((5-z1+z2-z3-z4-z5-W19)*M);

Q5>=  60-((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-W21)*M);  Q5<=  60+((6-z1+z2-z3-z4-z5-W20-
W21)*M);

Q5>=  144-((5-z1+z2-z3-z4-z5-W22)*M);  Q5 <=  144+((5-z1+z2-z3-z4-z5-
W22)*M);


M = 1000000;
```

Και επιλύοντας το λαμβάνουμε τα αποτελέσματα:

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              1988.000
  Objective bound:                              1988.000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               8
  Total solver iterations:                          1123

  Model Class:                                     MINLP

  Total variables:                     36
  Nonlinear variables:                  2
  Integer variables:                   35

  Total constraints:                  257
  Nonlinear constraints:                1

  Total nonzeros:                    1655
  Nonlinear nonzeros:                   2


                                    Variable           Value
                                          F1        1988.000
                                          Z1        1.000000
                                          Q1        240.0000
                                          Q2        476.0000
                                          Q3        284.0000
                                          Q4        0.000000
                                          Q5        0.000000
                                          Z2        1.000000
                                          Z3        1.000000
                                          Z4        0.000000
```

Z5	0.000000
W1	0.000000
P1	58.00000
W2	1.000000
W3	0.000000
W4	1.000000
W5	0.000000
W6	1.000000
W7	0.000000
W8	1.000000
W9	0.000000
W10	1.000000
W11	0.000000
W12	1.000000
W13	1.000000
W14	0.000000
W15	1.000000
W16	1.000000
W17	1.000000
W18	0.000000
W19	1.000000
W20	0.000000
W21	1.000000
W22	0.000000
W23	0.000000
W24	1.000000
M	1000000.

Row	Slack or Surplus
1	1988.000
2	0.000000
3	0.000000
4	332.0000
5	44.00000
6	0.000000
7	0.000000
8	137.0000
9	0.000000
10	100.0000
11	0.000000
12	0.000000
13	3.000000
14	0.9292929
15	3.000000
16	0.9292929
17	3.000000
18	0.9292929
19	1.666667
20	0.9387755
21	0.1428571
22	0.9787234
23	1.666667
24	0.9387755
25	0.5000000
26	0.8235294E-01
27	0.3636364
28	1.164557
29	0.5000000
30	0.8235294E-01
31	0.5000000
32	0.8235294E-01
33	0.3478261
34	0.1794872
35	1.081633
36	0.000000

37	0.1290323
38	0.000000
39	0.000000
40	8.000000
41	92.00000
42	3001234.
43	2998766.
44	2001508.
45	1998492.
46	2001234.
47	1998766.
48	1001508.
49	998492.0
50	2001234.
51	1998766.
52	1001508.
53	998492.0
54	1001234.
55	998766.0
56	999716.0
57	1000284.
58	0.000000
59	0.000000
60	4001234.
61	3998766.
62	2999116.
63	3000884.
64	3999780.
65	4000220.
66	2996708.
67	3003292.
68	1999349.
69	2000651.
70	2999300.
71	3000700.
72	2999349.
73	3000651.
74	3999044.
75	4000956.
76	3999716.
77	4000284.
78	2999863.
79	3000137.
80	2000000.
81	2000000.
82	1999863.
83	2000137.
84	1000000.
85	1000000.
86	1999863.
87	2000137.
88	1000000.
89	1000000.
90	999863.0
91	1000137.
92	999956.0
93	1000044.
94	0.000000
95	0.000000
96	3999863.
97	4000137.
98	2999881.
99	3000119.
100	3999964.
101	4000036.

102	3000000.
103	3000000.
104	1999863.
105	2000137.
106	2999904.
107	3000096.
108	2999863.
109	3000137.
110	3999872.
111	4000128.
112	3999956.
113	4000044.
114	3000258.
115	2999742.
116	2000121.
117	1999879.
118	2000198.
119	1999802.
120	1000061.
121	999939.0
122	2000153.
123	1999847.
124	1000016.
125	999984.0
126	1000093.
127	999907.0
128	1000000.
129	1000000.
130	0.000000
131	0.000000
132	4000018.
133	3999982.
134	3000000.
135	3000000.
136	4000000.
137	4000000.
138	3000000.
139	3000000.
140	2000000.
141	2000000.
142	3000000.
143	3000000.
144	3000476.
145	2999524.
146	4000476.
147	3999524.
148	4000476.
149	3999524.
150	3000044.
151	2999956.
152	2000044.
153	1999956.
154	2000044.
155	1999956.
156	1000044.
157	999956.0
158	2000044.
159	1999956.
160	1000044.
161	999956.0
162	1000044.
163	999956.0
164	1000044.
165	999956.0
166	0.000000

167	0.000000
168	4000284.
169	3999716.
170	3000284.
171	2999716.
172	4000284.
173	3999716.
174	3000284.
175	2999716.
176	2000284.
177	1999716.
178	3000284.
179	2999716.
180	2999900.
181	3000100.
182	3999900.
183	4000100.
184	3999900.
185	4000100.
186	2999895.
187	3000105.
188	1999895.
189	2000105.
190	1999895.
191	2000105.
192	999895.0
193	1000105.
194	2000000.
195	2000000.
196	1000000.
197	1000000.
198	1000000.
199	1000000.
200	1000000.
201	1000000.
202	0.000000
203	0.000000
204	3999895.
205	4000105.
206	2999895.
207	3000105.
208	3999812.
209	4000188.
210	2999812.
211	3000188.
212	1999853.
213	2000147.
214	2999812.
215	3000188.
216	2999821.
217	3000179.
218	3999812.
219	4000188.
220	3999812.
221	4000188.
222	2999940.
223	3000060.
224	1999940.
225	2000060.
226	2000000.
227	2000000.
228	1000000.
229	1000000.
230	1999940.
231	2000060.

232	999940.0
233	1000060.
234	1000000.
235	1000000.
236	1000000.
237	1000000.
238	0.000000
239	0.000000
240	3999940.
241	4000060.
242	2999940.
243	3000060.
244	3999940.
245	4000060.
246	2999904.
247	3000096.
248	2000000.
249	2000000.
250	3000000.
251	3000000.
252	2999940.
253	3000060.
254	3999940.
255	4000060.
256	3999856.
257	4000144.
258	0.000000

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι:

Μέγιστο κέρδος στρατηγικού παραγωγού F=1988 για τιμή προσφοράς p_1=58 και με ποσότητες συμμετοχής των παραγωγών. (q_1,q_2, q_3,q_4, q_5)= (240,476,284,0,0).

Για την εξακρίβωση της ορθότητας της λύσης επιλύουμε το πρόβλημα του Ανεξάρτητου Διαχειριστή Συστήματος με τις τιμές αυτές.

```
MIN = P1*Q1 + 52*Q2 + 57*Q3 + 65*Q4 + 72*Q5 + 13000*Z1 + 10000*Z2 +
15000*Z3 + 27000*Z4 + 24000*Z5;

!SUBJECT TO:;
Q1+Q2+Q3+Q4+Q5=1000; !DEMAND;

Q1 >= Z1*240; Q2 >= Z2*144; Q3 >= Z3*240; Q4 >= Z4*105; Q5 >= Z5*60;
!TECHNICAL MINIMUM;
Q1 <= Z1*377; Q2 <= Z2*476; Q3 <= Z3*384; Q4 <= Z4*188; Q5 <= Z5*144;
!TECHNICAL MAXIMUM;
P1 = 58;
@BIN(Z1); @BIN(Z2); @BIN(Z3); @BIN(Z4); @BIN(Z5);
```

Από την επίλυση του προβλήματος λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              92860.00
  Objective bound:                              92860.00
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               0
  Total solver iterations:                            12
  Elapsed runtime seconds:                          0.06
```

Model Class:		MILP
Total variables:	10	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	5	
Total constraints:	12	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	35	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
P1	58.00000	0.000000
Q1	240.0000	0.000000
Q2	476.0000	-5.000000
Q3	284.0000	0.000000
Q4	0.000000	8.000000
Q5	0.000000	15.00000
Z1	1.000000	13240.00
Z2	1.000000	10000.00
Z3	1.000000	15000.00
Z4	0.000000	27000.00
Z5	0.000000	24000.00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	92860.00	-1.000000
2	0.000000	-57.00000
3	0.000000	-1.000000
4	332.0000	0.000000
5	44.00000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	137.0000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	100.0000	0.000000
11	0.000000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	0.000000	-240.0000

Variable	Value
F1	1988.000
Z1	1.000000
Q1	240.0000
Q2	476.0000
Q3	284.0000
Q4	0.000000
Q5	0.000000
Z2	1.000000
Z3	1.000000
Z4	0.000000
Z5	0.000000
W1	0.000000
P1	58.00000
W2	1.000000
W3	0.000000

Βλέπουμε πως οι ποσότητες που προκύπτουν είναι $(q_1,q_2, q_3,q_4, q_5)= (240,476,284,0,0)$ και το ελάχιστο κόστος για τον ΑΔΣ 92860. Βλέποντας πως τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον αλγόριθμο όχι μόνο είναι εφικτά και για τα δύο επίπεδα αλλά οδηγούν και στα ίδια αποτελέσματα επιβεβαιώνοντας πως είναι ολική βέλτιστη λύση για το ακέραιο διεπίπεδο πρόβλημα.

Κεφάλαιο 5 Σύνοψη Διπλωματικής Εργασίας

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία μελετήθηκε μια άλλη προσέγγιση επίλυσης ενός μεικτού ακέραιου διεπίπεδου προβλήματος με την εφαρμογή του συνδυασμού ενός ευρετικού αλγόριθμου στο πρόβλημα του κάτω επιπέδου για την εύρεση των βέλτιστων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης του άνω επιπέδου. Τα προβλήματα αυτά βρίσκονται σε αντιστοιχία με την τιμή μιας μεταβλητής απόφασης για δεδομένες τιμές των υπολοίπων.

Στη συνέχεια τα αποτελέσματα υπόκεινται σε σύγκριση μεταξύ τους για να εντοπιστεί το ολικά βέλτιστο του προβλήματος. Η σύγκριση αυτή παρουσιάζει δυσκολία ως προς το μέγεθος του προβλήματος και η χρήση ενός απλού ευρετικού αλγορίθμου θα παρουσίαζε υπερβολικές υπολογιστικές απαιτήσεις. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες valid inequalities για έναν cutting-plane αλγόριθμο που με την χρήση των κατάλληλων ευφυών δυαδικών μεταβλητών οδηγεί σε αξιόπιστα και γρήγορα αποτελέσματα.

Στην κατεύθυνση μελλοντικής έρευνας θα μπορούσε να αξιολογηθεί η χρήση του αλγορίθμου σε ένα χρονικό ορίζοντα πολλών περιόδων. Επιπλέον, θα μπορούσαν να προστεθούν επιπρόσθετοι περιορισμοί στο πρόβλημα, όπως περιβαλλοντικά κριτήρια, προτίμηση χρήσης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και φυσικού αερίου έναντι καύσης πετρελαίου λιγνίτη.

Βιβλιογραφία

[1] Andrianesis, P., Liberopoulos, G., Kozanidis, G., Papalexopoulos, A. 2013. Recovery mechanisms in day-ahead electricity markets with non- convexities - Part II: Implementation and numerical evaluation. *IEEE Trans. Power Syst.* **28** 969–977.

[2] Badri, A., Jadid, S., Rashidinejad, M., Moghaddamc, M.P. 2008. Optimal bidding strategies in oligopoly markets considering bilateral contracts and transmission constraints. *Electr. Power Syst. Res.* **78** 1089–1098.

[3] Bajpai, P., Singh, S.N. 2008. Strategic bidding in network constrained electricity markets using FAPSO. *Int. J. Energy Sect. Manage.* **2** 274–296.

[4] Bard, J.F. 1998. Practical bilevel optimization. Kluwer, Boston, MA, USA.

[5] Candler, W., Norton R. 1977. Multi-level programming and development policy. Working Paper No 258, World Bank, Washington, DC, USA.

[6] Dempe, S. 2010. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints. *Optimization* **52** 333–359.

[7] Dempe, S. 2002. Foundations of bilevel programming. Kluwer Academic, New York, NY, USA.

[8] DeNegre, S.T., Ralphs, T.K. 2009. A branch-and-cut algorithm for integer bilevel linear programs. J.W. Chinneck, B. Kristjansson, M.J. Saltzman, eds. *Operations Research and Cyber-Infrastructure*, Operations Research/Computer Science Interfaces, Springer, **47** 65-78.

[9] Foroud, A.A., Amirahmadi, M., Bahmanzadeh, M., Abdoos, A.A. 2011. Optimal bidding strategy for all market players in a wholesale power market considering demand response programs. *Eur. Trans. Electr. Power* **21** 293–311.

[10] Gabriel, S.A., Leuthold, F.U. 2010. Solving discretely-constrained MPEC problems with applications in electric power markets. *Energy Econ.* **32** 3–14.

[11] Geoffrion, A.M., Nauss, R. 1977. Parametric and postoptimality analysis in integer linear programming. *Manage. Sci.* **23** 453–466.

[12] Gountis, V.P., Bakirtzis, A.G. 2004. Bidding strategies for electricity producers in a competitive electricity marketplace. *IEEE Trans. Power Syst.* **19** 356–365.

[13] Hobbs, B.F., Metzler, C.B., Metzler, J-S. 2000. Strategic gaming analysis for electric power systems: An MPEC approach. *IEEE Trans. Power Syst*. **15** 638–645.

[14] Köppe, M., Queyranne, M., Ryan, C.T. 2010. Parametric integer programming algorithm for bilevel mixed integer programs. *J. Optim. Theory Appl.* **146** 137–150.

[15] Kozanidis, G., Kostarelou, E., Andrianesis, P., Liberopoulos, G. 2013. Mixed integer parametric bilevel programming for optimal strategic bidding of energy producers in day-ahead electricity markets with indivisibilities. *Optimization*, in press.

[16] Li, T., Shahidehpour, M. 2005. Strategic bidding of transmission-constrained GENCOs with incomplete information. *IEEE Trans. Power Syst.* **20** 437–447.

[17] Li, T., Shahidehpour, M., Keyhani, A. 2004. Market power analysis in electricity markets using supply function equilibrium model. *IMA J. Manage. Math.* **15** 339–354.

[18] Loridan, P., Morgan, J. 1996. Weak via strong stackelberg problem: New results. *J. Global Optim*. **8** 263–287.

[19] Ma, Y., Jiang, C., Hou, Z., Wang, C. 2006. The formulation of the optimal strategies for the electricity producers based on the particle swarm optimization algorithm. *IEEE Trans. Power Syst.* **21** 1663–1671.

[20] Moore, J.T., Bard, J.F. 1990. The mixed integer linear bilevel programming problem. *Oper. Res.* **38** 911–921.

[21] Schweppe, F.C., Caramanis, M.C., Tabors, R.D., Bohn, R.E. 1988. Spot pricing of electricity. Kluwer, Boston, MA, USA.

[22] Soleymani, S., Ranjbar, A.M., Shirani, A.R. 2008. New approach to bidding strategies of generating companies in day ahead energy market. *Energy Convers. Manage.* **49** 1493–1499.

[23] Vahidinasab, V., Jadid, S. 2009. Multiobjective environmental/techno-economic approach for strategic bidding in energy markets. *Appl. Energy* **86** 496–504.

[24] Weber, J.D., Overbye, T.J. 2002. An individual welfare maximization algorithm for electricity markets. *IEEE Trans. Power Syst.* **17** 590–596.

[25] Wen, U.P., Yang, Y.H. 1990. Algorithms for solving the mixed integer two-level linear programming problem. *Comp. &Oper. Res.* **17** 133–142.

[26] Wen, U.P., Huang, A.D. 1996. A simple tabu search method to solve the mixed-integer linearbilevel programming problem. *Eur. J. Oper. Res .***88** 563-571.

[27] Zhang, D., Wang, Y., Luh, P.B. 2000. Optimization based bidding strategies in the deregulated market. *IEEE Trans. Power Syst.* **15** 981–986.

[28] Zhang, G., Zhang, G., Gao, Y., Lu, J. 2011. Competitive strategic bidding optimization in electricity markets using bilevel programming and swarm technique. *IEEE Trans. Ind. Electron.* **58** 2138–2146.

[29] Zhao, F., Luh, P.B., Yan, J.H., Stern, G.A., Chang, S.C. 2008. Payment cost minimization auction for deregulated electricity markets with transmission capacity constraints. *IEEE Trans. Power Syst.* **23** 532–544.